2P-Y eksamen våren 2018 løsningsforslag

DEL 1
Uten hjelpemidler

Tid: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer.
Hjelpemidler: Del 1 Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.

Oppgave 1 (3 poeng)

Markus og vennene hans spiller kort. Nedenfor ser du hvor mange poeng Markus fikk i hver av de siste åtte rundene.

Runde	Poengsum Markus
1	20
2	−15
3	5
4	15
5	−8
6	−3
7	−24
8	30

Bestem variasjonsbredden og gjennomsnittet for poengsummene.

Variasjonsbredden: Største poengsum – Minste poengsum = $30-(-24)=54$ poeng

Gjennomsnitt: $\dfrac{20+(-15)+5+15+(-8)+(-3)+(-24)+30}{8}=\dfrac{20}{8}=\dfrac{5}{2}=2,5$ poeng

Oppgave 2 (1 poeng)

I klassen til Mats er det 25 elever. 20 % av elevene har bodd i Norge i mindre enn fire år. Hvor mange av elevene har bodd i Norge i mindre enn fire år?

$$25\cdot\frac{20}{100}=5$$

5 elever har bodd i Norge mindre enn fire år.

Oppgave 3 (1 poeng)

Regn ut

$$\frac{5\cdot 10^6}{2\cdot 10^{-8}} = \frac{5\cdot 10^6}{2\cdot 10^{-8}} = 2{,}5\cdot 10^{6-(-8)} = \underline{\underline{2{,}5\cdot 10^{14}}}$$

Oppgave 4 (5 poeng)

BMI (Body Mass Index) er en internasjonal standard fra Verdens helseorganisasjon. Standarden indikerer om voksne over 19 år er undervektige, har normal vekt eller er overvektige. Se tabellen nedenfor.

BMI	Kategori
$\langle\leftarrow,\ 18{,}5\rangle$	Undervektig
$[18{,}5,\ 25\rangle$	Normal vekt
$[25,\ 30\rangle$	Overvektig
$[30,\ \rightarrow\rangle$	Fedme

Et år deltok 1000 personer i en undersøkelse av BMI. Resultatene ser du i tabellen nedenfor.

BMI	Frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[17,\ 18{,}5\rangle$	20			
$[18{,}5,\ 25\rangle$		520		
$[25,\ 30\rangle$			0,4	0,92
$[30,\ 32\rangle$	80			

a) Tegn av tabellen, og fyll inn tallene som mangler.

BMI	Frekvens	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ relativ frekvens
$[17,\ 18{,}5\rangle$	20	20	$\frac{20}{1000}=0{,}02$	0,02
$[18{,}5,\ 25\rangle$	$520-20=500$	520	$\frac{500}{1000}=0{,}5$	$0{,}02+0{,}5=0{,}52$
$[25,\ 30\rangle$	$1000-20-80-500$ $=400$	$520+400=920$	0,4	0,92
$[30,\ 32\rangle$	80	$920+80=1000$	$\frac{80}{1000}=0{,}08$	$0{,}92+0{,}08=1$

Fire av cellene i tabellen er grå.

b) Forklar hva hvert av tallene i disse grå cellene forteller om personene som deltok i undersøkelsen.

Tallet 80: Det er 80 personer som har en BMI i intervallet mer eller lik 30 og opp til 32. Disse er i kategorien «Fedme».

Tallet 520: Det er 520 personer som har en BMI i intervallet mer eller lik 17 og opp til 25. Dette er summen av de som er i kategorien «Undervektig» og «Normalvektig».

Tallet 0,4: Det er 40 % av personene som har en BMI i intervallet mer eller lik 25 og opp til 30. Disse er i kategorien «Overvektig».

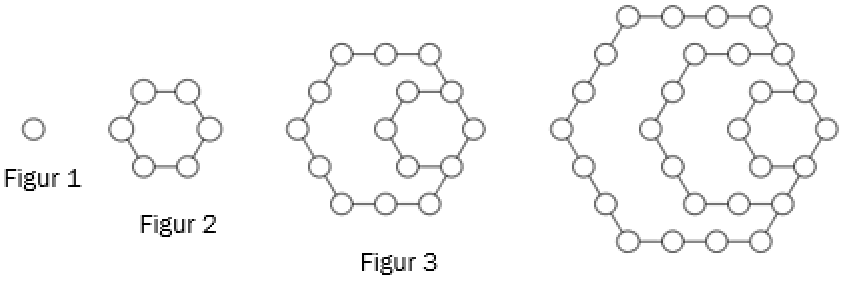
Tallet 0,92: Det er 92 % av personene som har en BMI i intervallet mer eller lik 17 og opp til 30. Dette er summen av de som er i kategorien «Undervektig», «Normalvektig» og «Overvektig». Altså andelen som ikke er i kategorien «Fedme».

c) Forklar hvordan vi kan se at medianen ligger i kategorien «Normal vekt».

Det er 1000 personer med i undersøkelsen. Det betyr at medianplassen er gjennomsnittet av verdi nummer 500 og 501.

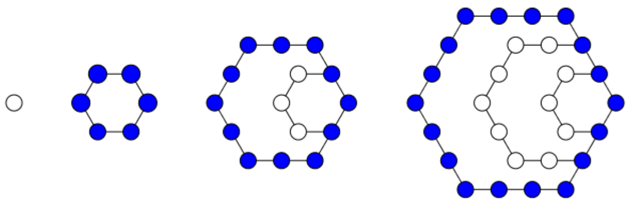
Denne verdien vil ligge i kategorien «Normal vekt» da vi har 520 personer til sammen i de to laveste kategoriene, og kun 20 av disse personene er i kategorien «Undervektig».

Oppgave 5 (8 poeng)



Ovenfor ser du fire figurer. Figurene er satt sammen av små sirkler. Hans og Grete vil fortsette å lage figurer etter samme mønster. De vil også se på ulike sammenhenger mellom antall sirkler i figurene.

Hans starter med figur nummer 2 og ser på sirklene i de ytterste sekskantene. Han fargelegger disse sirklene blå og setter opp tabellen til høyre nedenfor.



Figur-nummer	Antall sekskanter	Antall sirkler i ytterste sekskant
2	1	6
3	2	12
4		
5		
n		

a) Skriv av tabellen, og fyll ut det som mangler.

Figur-nummer	Antall sekskanter	Antall sirkler i ytterste sekskant
2	1	6
3	2	12
4	3	$3 \cdot 6 = 18$
5	4	$4 \cdot 6 = 24$
n	$n-1$	$(n-1) \cdot 6 = 6n - 6$

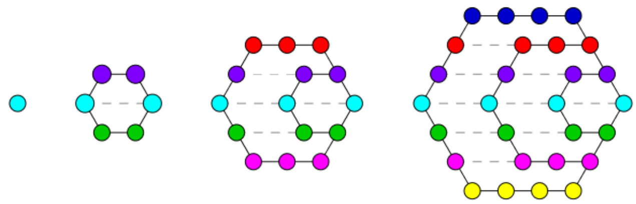
En figur har 246 sirkler i den ytterste sekskanten.

b) Hvor mange sekskanter er det i denne figuren?
Vi har fra tabellen i oppgave a) at det er 6 ganger flere sirkler i den ytterste sekskanten enn det er sekskanter.

Vi finner da antall sekskanter i denne figuren ved å dele 246 med 6, $\frac{246}{6} = 41$

Det er 41 sekskanter i en figur som har 246 sirkler i den ytterste sekskanten.

Grete ser at sirklene ligger på rader. Hun stipler linjer og fargelegger slik at alle sirklene på én rad har samme farge. Etterpå setter hun opp tabellen til høyre nedenfor.



Figur-nummer	Antall rader	Antall sirkler i hver rad	Antall sirkler i figuren
1	1	1	1
2	3	2	6
3	5	3	15
4			
n			

c) Skriv av tabellen, og fyll ut det som mangler.

Figur-nummer	Antall rader	Antall sirkler i hver rad	Antall sirkler i figuren
1	1	1	1
2	3	2	6
3	5	3	15
4	$2 \cdot 4 - 1 = 7$	4	$7 \cdot 4 = 28$
n	$2n - 1$	n	$(2n-1)n = 2n^2 - n$

d) Hvor mange sirkler vil det være i figur nummer 100?
Vi bruker formelen vi fant i tabellen i oppgave c) og setter $n = 100$

$$2 \cdot 100^2 - 100 = 20000 - 100 = 19900$$

Det vil være 19 900 sirkler i figur nummer 100.

Oppgave 6 (6 poeng)

En dyrebestand består i dag av 12 000 dyr. En gruppe forskere antar at bestanden vil avta lineært, og at det vil være 6000 dyr igjen om 10 år.

a) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom antakelsen er riktig.
Vi har at dyrebestanden avtar lineært med 6000 dyr i løpet av 10 år. Det vil si at dyrebestanden avtar med 600 dyr per år. I dag er det 12 000 dyr. Vi kan da sette opp en lineær modell

$$f(x) = 12\,000 - 600x$$, der f viser dyrebestanden etter x antall år.

En annen gruppe forskere antar at bestanden vil avta eksponentielt, og at det vil være 11 400 dyr igjen om ett år.

b) Sett opp en modell som viser hvor mange dyr det vil være i bestanden om x år dersom denne antakelsen er riktig.
Vi finner først ut hvor mange prosent dyrebestanden vil avta hvert år etter denne modellen.

$$\frac{12000 - 11400}{12000} = \frac{600}{12000} = \frac{1}{20} = 5\%$$

En nedgang på 5 % gir en vekstfaktor på 0,95. Vi kan da sette opp eksponentiell modell

$$g(x) = 12000 \cdot 0{,}95^x$$, der g viser dyrebestanden etter x antall år

c) Ifølge hvilken av de to modellene ovenfor vil det være færrest dyr igjen i bestanden om 10 år?

Vi vet at den lineære modellen antar en nedgang på 600 dyr per år. Den eksponentielle avtar med 600 dyr første år. Det neste året vil dyrebestanden avta med 5 % av 11 400, som vil være lavere enn 600.

Det betyr at dyrebestanden vil avta med færre og færre dyr for hvert år som går etter den eksponentielle modellen. Etter den lineære modellen synker dyrebestanden med det samme antallet hvert år. Etter 10 år vil det derfor være færrest dyr igjen med den lineære modellen.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

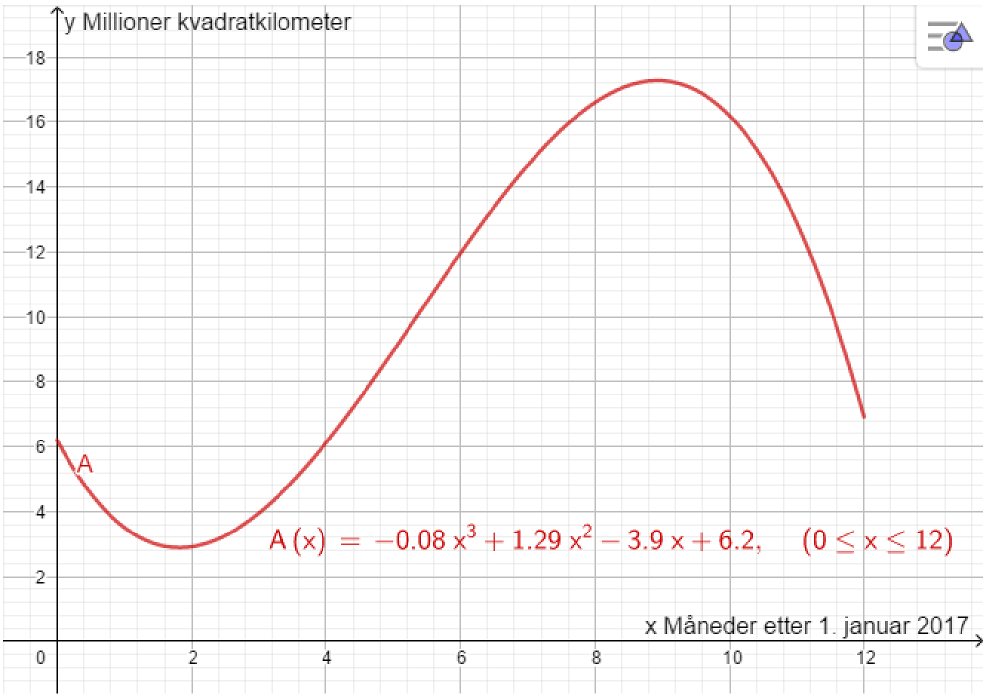
(Bilde er fjernet pga opphavsrett.)

Funksjonen A gitt ved

$$A(x) = -0,08x^3 + 1,29x^2 - 3,9x + 6,2 \qquad , \qquad 0 \le x \le 12$$

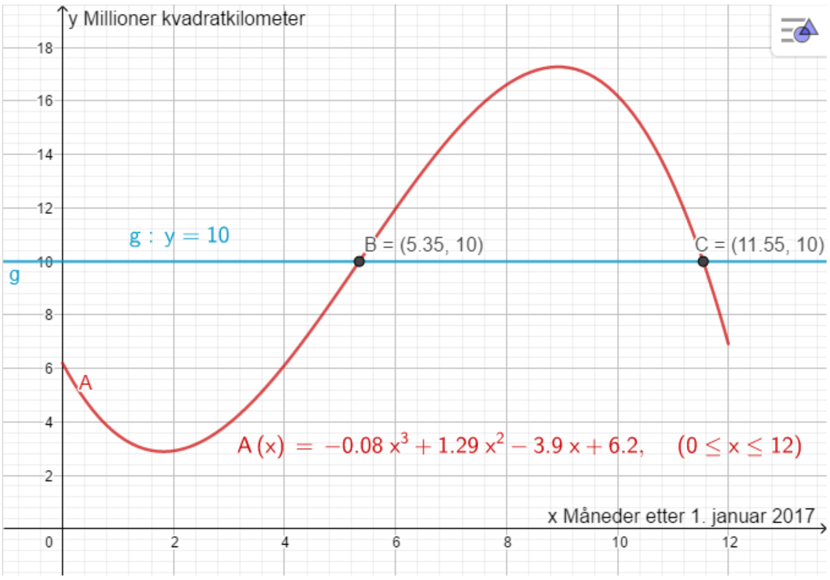
viser hvor mange millioner kvadratkilometer $A(x)$ rundt Antarktis som var dekket av havis x måneder etter 1. januar 2017.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til A.
Vi setter funksjonen inn i GeoGebra med kommandoen «Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)».



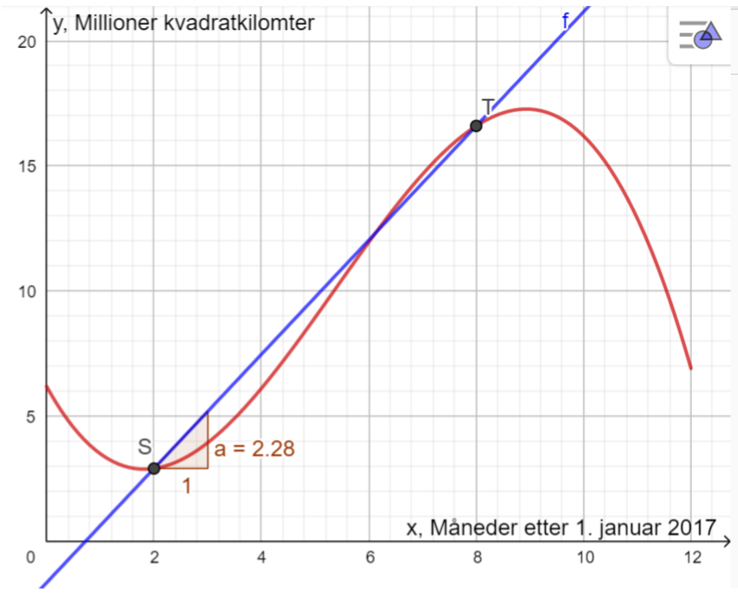
b) Hvor lenge var mer enn 10 millioner kvadratkilometer dekket av havis?
Vi legger inn linjen $y = 10$, og bruker kommandoen «Skjæring mellom to objekt». Vi ser at mellom punktene $B = (5{,}35 \ ,10)$ og $C = (11{,}55 \ ,10)$ er grafen til A over 10.

Det betyr at det var mer enn 10 millioner kvadratkilometer havis fra begynnelsen av juni (x = 5,35) til midten av desember (x = 11,55) det vil si omtrent 6,2 måneder.



c) Hvor mange kvadratkilometer økte området som var dekket av havis, i gjennomsnitt med per måned fra 1. mars til 1. september?
1. mars er gitt ved x = 2 og 1. september er gitt ved x = 8.
Vi legger inn punktene $S = (2, \ A(2))$ og $T = (8, \ A(8))$ og trekker en linje gjennom disse punktene ved å bruke verktøyet «linje». Videre bruker vi verktøyet «stigning» på den linjen og finner at stigningstallet er $a = 2{,}28$

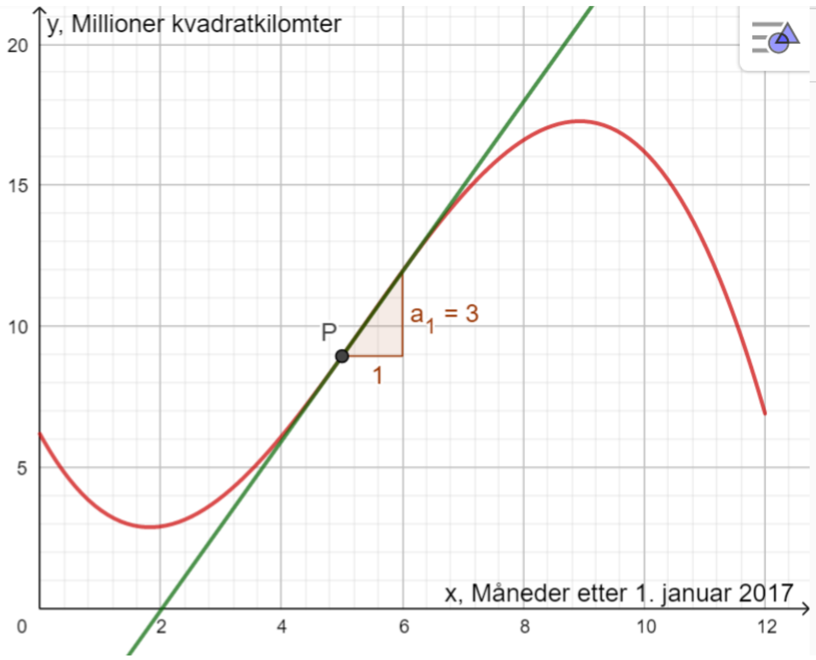
Vi finner at i gjennomsnitt økte antall millioner kvadratkilometer havis med 2,28 kvadratkilometer per måned.



d) Bestem den momentane vekstfarten til funksjonen A når $x=5$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.

Den momentane vekstfarten i et punkt er stigningen til tangenten i punktet. Vi legger inn punktet $P=(5,\ A(5))$ og tegner tangenten til grafen til A i punktet P ved å bruke verktøyet «tangenter. Vi finner stigningen til tangenten med verktøyet «stigning».

Vi har $x=5$ angir 5 måneder etter 1. januar, altså 1. juni 2017. Vi finner at den momentane vekstfart på dette tidspunktet er på 3 millioner kvadratkilometer. Det vil si at antall millioner kvadratkilometer havis øker med 3 millioner kvadratkilometer per måned i begynnelsen av juni i dette området.



Oppgave 2 (3 poeng)

Verdien av en bil har avtatt med 12 % hvert år siden den var ny. Vi antar at verdien vil fortsette å avta med 12 % hvert år framover. I dag er bilen verd 300 000 kroner.

a) Hvor mye vil bilen være verd om fem år?
Vekstfaktoren blir $1-0{,}12=0{,}88$
$30\ 000\cdot 0{,}88^5 \approx 158\ 319{,}58$

Om 5 år vil bilen være verd omtrent 158 000 kr.

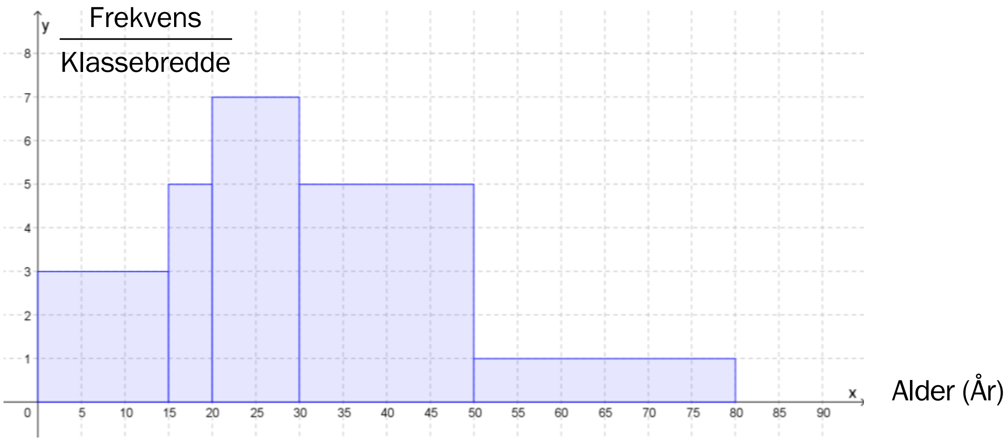
b) Hvor mye var bilen verd for fem år siden?
$30\ 000\cdot 0{,}88^{-5} \approx 568\ 470{,}45$

For 5 år siden var bilen verd omtrent 568 000 kr.

Oppgave 3 (6 poeng)

Per og Kari vil lage et diagram som viser aldersfordelingen til innbyggerne i et boligområde. De diskuterer om de skal bruke et histogram eller et søylediagram.

Ut fra opplysningene de har fått, lager Per histogrammet nedenfor. Innbyggerne er delt inn i fem aldersgrupper.



a) Hvor mange personer bor i boligområdet?

For å finne antall personer må vi summere arealene av søylene.

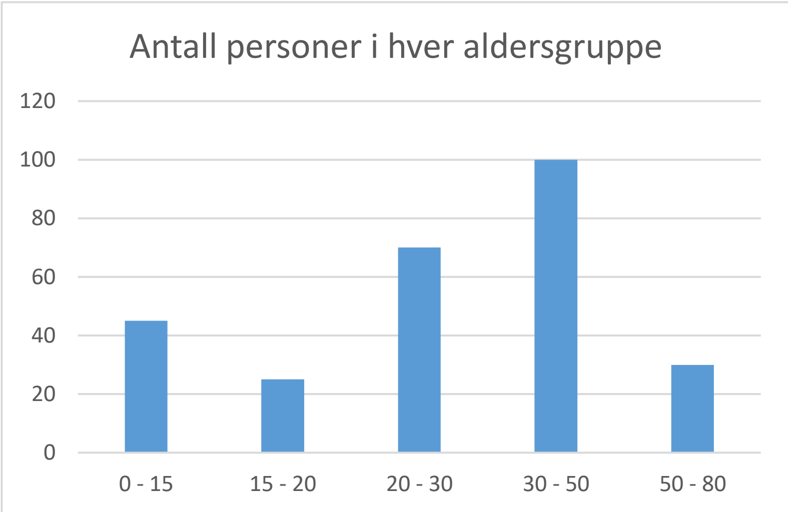
$$(15 \cdot 3) + (5 \cdot 5) + (10 \cdot 7) + (20 \cdot 5) + (30 \cdot 1)$$
$$\approx 270$$

Det bor 270 personer i boligområdet.

Kari lurer på om et søylediagram vil være bedre egnet.

b) Lag et søylediagram som viser hvor mange personer det er i hver aldersgruppe.
Vi lager søylediagram ved å bruke regnearket Excel.
Vi markerte kolonne A og B og valgte verktøyet søylediagram.

	A	B
1	Aldersgruppe	Antall personer i hver aldersgruppe
2	0 - 15	45
3	15 - 20	25
4	20 - 30	70
5	30 - 50	100
6	50 - 80	30



c) Mener du et søylediagram eller et histogram er best egnet til å illustrere dette datamaterialet?

Med et søylediagram ser vi antall innbyggere i hver aldersgruppe bedre, men vi ser ikke at aldersgruppene har ulik bredde.

Med et histogram ser man tydeligere bredden på aldersgruppene.

Per og Kari ville lage et diagram som skulle illustrere aldersfordelingen i et boligområde. Jeg synes histogrammet viser aldersfordelingen på en bedre måte enn søylediagrammet i dette tilfellet. Det skyldes i hovedsak forskjell i klassebredde.

Oppgave 4 (7 poeng)

Årstall	1920	1940	1960	1980	2000	2010	2017
Folketall i millioner	1902	2285	2991	4401	6088	6889	7474

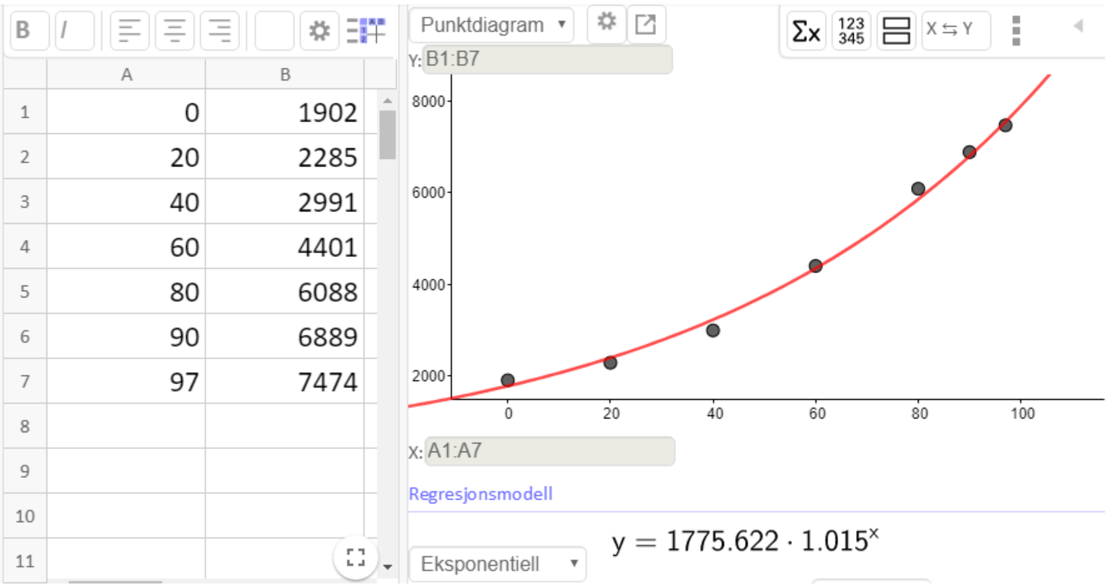
Tabellen ovenfor viser folketallet i verden noen utvalgte år i perioden fra 1920 til 2017.

a) La x være antall år etter 1. januar 1920, og bruk regresjon til å vise at funksjonen f gitt ved

$$f(x) = 1775{,}6 \cdot 1{,}015^x$$

er en modell som passer godt med tallene i tabellen.

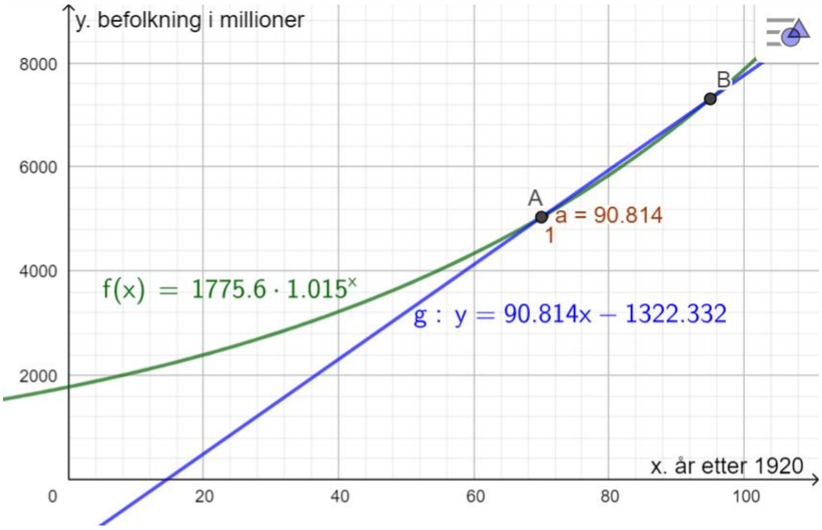
Vi legger inn verdiene i et regneark i GeoGebra. Vi velger så verktøyet regresjonsanalyse og eksponentiell modell.



Vi finner at $f(x) = 1775{,}6 \cdot 1{,}015^x$ er en god modell for endringen i folketall i verden, som skulle vises.

b) Hvor mange prosent har folketallet økt med per år ifølge modellen i oppgave a)?
Fra funksjonsuttrykket ser vi at vekstfaktoren er 1,015. Det betyr at prosentvis økning per år er på $1{,}015 - 1 = 0{,}015 = 1{,}5\,\%$.

c) Bestem den gjennomsnittlige vekstfarten til f fra $x = 70$ til $x = 95$.
Gi en praktisk tolkning av dette svaret.
Vi tegner grafen til f i GeoGebra, og tegner en rett linje med verktøyet «linje» gjennom punktene $A\big(70, f(70)\big)$ og $B\big(95, f(95)\big)$. Vi finner at stigningstallet til denne linjen er 90,8. Det betyr at den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet x = 70 til x = 95 er 90,8.



Folketallet har i gjennomsnitt økt med 90,8 millioner per år i perioden 1990 til 2015.

Det er ingen krav til grafisk løsningen i denne oppgaven, så vi kunne også ha funnet svaret ved regning, for eksempel slik

1	$\dfrac{f(95) - f(70)}{95 - 70}$
	$\approx$ **90.81**

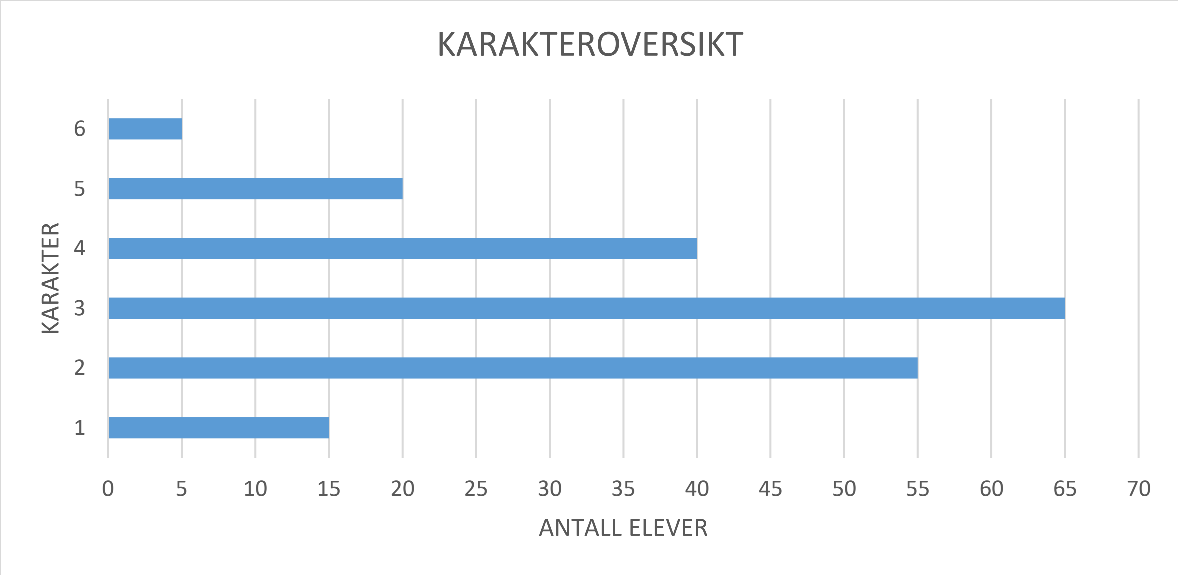
FN har utarbeidet prognoser som viser at folketallet i verden vil være 9,8 milliarder i år 2050 og 11,2 milliarder i år 2100.

d) Vurder om modellen i oppgave a) samsvarer med disse prognosene.
Vi regner ut $f(130)$ som svarer til folketallet i 2015 og $f(180)$ som svarer til folketallet i 2100.

2	$f(130)$
	$\approx$ **12300.72**
3	$f(180)$
	$\approx$ **25896**

I følge modellen vil folketallet være 12,3 milliarder i 2015, og 25,9 milliarder i 2100. Modellen gir et høyere folketall enn FNs prognoser for begge årstallene, spesielt for år 2100. Modellen samsvarer ikke godt med prognosene til FN.

Oppgave 5 (8 poeng)



Diagrammet ovenfor viser karakterfordelingen ved en matematikkeksamen et år.

a) Hvor mange prosent av elevene fikk karakteren 4 eller bedre?

Vi leser av diagrammet og finner at det er $40+20+5=65$ elever som fikk karakteren 4 eller bedre.

Totalt antall elever er $65+65+55+15=200$

$$\frac{65}{200}\cdot 100\,\% = 32{,}5\,\%$$

Vi finner at 32,5 % av elevene fikk karakteren 4 eller bedre.

b) Lag et regneark som vist nedenfor. Legg inn verdier i de hvite cellene og formler i de blå cellene. Bruk regnearket til å bestemme gjennomsnittskarakteren og standardavviket til karakterfordelingen.
Vi legger inn etterspurte verdier i Excel og gjør beregningene.

	A	B	C	D
1	Karakter	Frekvens		
2	x	f	$x \cdot f$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f$
3	1			
4	2			
5	3			
6	4			
7	5			
8	6			
9	Sum			
10				
11	Gjennomsnitt $(\bar{x})$			
12				
13	Standardavvik			

	A	B	C	D
1	Karakter	Frekvens		
2	x	f	$x \cdot f$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f$
3	1	15	15	63,0375
4	2	55	110	60,6375
5	3	65	195	0,1625
6	4	40	160	36,1
7	5	20	100	76,05
8	6	5	30	43,5125
9	Sum	200	610	279,5
10				
11	Gjennomsnitt $(\bar{x})$	3,05		
12				
13	Standardavvik	1,182159		

	A	B	C	D
1	Karakter	Frekvens		
2	x	f	$x \cdot f$	$(x-\bar{x})^2 \cdot f$
3	1	15	=A3*B3	=(A3-B11)^2*B3
4	2	55	=A4*B4	=(A4-B11)^2*B4
5	3	65	=A5*B5	=(A5-B11)^2*B5
6	4	40	=A6*B6	=(A6-B11)^2*B6
7	5	20	=A7*B7	=(A7-B11)^2*B7
8	6	5	=A8*B8	=(A8-B11)^2*B8
9	Sum	=SUMMER(B3:B8)	=SUMMER(C3:C8)	=SUMMER(D3:D8)
10				
11	Gjennomsnitt $(\bar{x})$	=C9/B9		
12				
13	Standardavvik	=ROT(D9/(B9))		

Vi finner at gjennomsnittskarakteren er 3,05 med et standardavvik på 1,18

Året etter var det 180 elever som hadde eksamen. Gjennomsnittskarakteren dette året var 3,25.

c) Hva var gjennomsnittskarakteren dersom vi ser disse to årene under ett?

Vi legger sammen resultatet for de to årene og deler på samlet antall elever.

1
$$\frac{(3.25 \cdot 180) + (200 \cdot 3.05)}{(180 + 200)}$$
$$\approx \mathbf{3.14}$$

<u>Gjennomsnittskarakteren for disse to årene sett under ett var 3,14.</u>

Oppgave 6 (5 poeng)

Maria vil legge to røde og to blå kuler i en kopp.

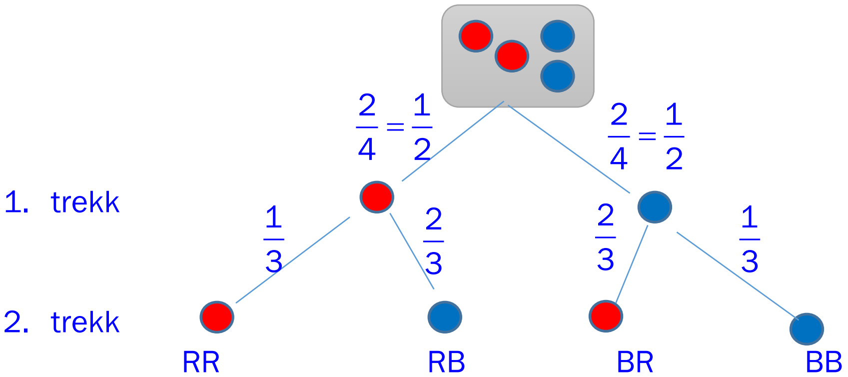
- Hun vil trekke to kuler fra koppen tilfeldig.
- Hun vil ikke legge tilbake den første kula før hun trekker den neste.

a) Tegn et valgtre, gjør beregninger, og avgjør hvilken av påstandene nedenfor som er riktig.

Påstand 1: Det er mest sannsynlig at hun kommer til å trekke to kuler med samme farge.

Påstand 2: Det er mest sannsynlig at hun kommer til å trekke to kuler med ulik farge.

Påstand 3: Sannsynligheten for at hun kommer til å trekke to kuler med samme farge, er like stor som sannsynligheten for at hun kommer til å trekke to kuler med ulik farge.



Vi finner sannsynligheten for de fire ulike utfallene:

$$P(BB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \qquad P(RR)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(RB)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \qquad P(BR)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Sannsynligheten for å få to kuler med samme farge blir:

$$P(BB)+P(RR)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

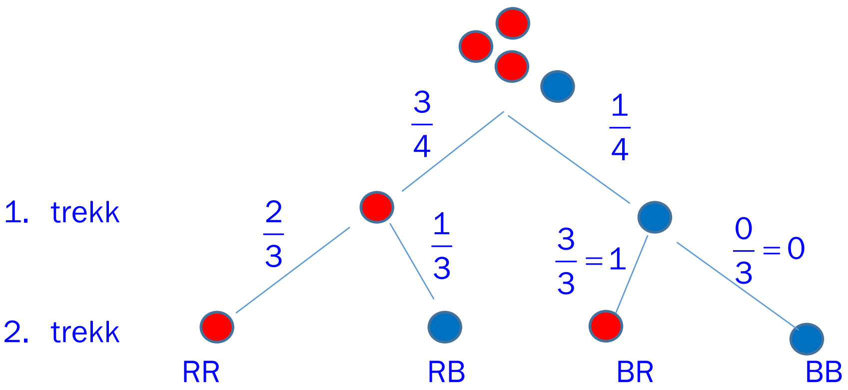
Sannsynligheten for å få to kuler med ulik farge blir:

$$P(RB)+P(RB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Det er størst sannsynlighet for at hun kommer til å trekke to kuler med ulik farge. <u>Påstand 2 er dermed den riktige påstanden.</u>

b) Gjør beregninger, og avgjør hvilken av påstandene ovenfor som er riktig dersom Maria i stedet legger tre røde og én blå kule i koppen og trekker to kuler på samme måte som beskrevet ovenfor.

Vi tegner et nytt valgtre som passer med opplysningene i oppgaven.



Sannsynligheten for to kuler med lik farge blir:

$$P(BB)+P(RR)=\left(\frac{1}{4}\cdot 0\right)+\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

Sannsynligheten for to kuler med ulik farge blir:

$$P(RB)+P(BR)=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\cdot 1\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Det er nå like sannsynlig å få to kuler med samme farge som å få to kuler med ulik farge.

<u>Påstand 3 er nå riktig.</u>

Kilder for bilder, tegninger osv.

- CO_2-utslipp: http://www.ofvas.no/co2-utslippet-b-i-l/category635.html (06.01.2018)
- Havis: https://www.sciencenews.org/blog/science-ticker/antarctic-sea-ice-shrinks-record-low (08.12.2017)
- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet