Eksamen MAT1005 Matematikk 2P-Y Våren 2014

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Nedenfor ser du hvor mange snegler Astrid har plukket i hagen hver kveld de ti siste kveldene.

10 5 22 28 2 8 50 15 40 10

Bestem gjennomsnittet og medianen for dette datamaterialet.

Når vi ordner antall snegler i stigende rekkefølge, er medianen den midterste, eller gjennomsnittet av de to midterste.

Vi ordner dataene i stigende rekkefølge:
2 5 8 10 10 15 22 28 40 50

$$\frac{10+15}{2}=12,5$$

Medianen: $\underline{\underline{12,5}}$

Gjennomsnittet: $\frac{2+5+8+10+10+15+22+28+40+50}{10}=\frac{190}{10}=\underline{\underline{19}}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Sorter uttrykkene nedenfor etter stigende verdi. Vis eller forklar hvordan du har tenkt.

$6 \cdot 2^{-3}$ $\quad \dfrac{0{,}0016}{2 \cdot 10^{-3}}$ $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ $\quad \left(\dfrac{1}{4}\right)^0$

$$6 \cdot 2^{-3} = \frac{6}{2^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{0{,}0016}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1{,}6}{2} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}80$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

I stigende rekkefølge: $\underline{\underline{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\ 6 \cdot 2^{-3},\ \dfrac{0{,}0016}{2 \cdot 10^{-3}},\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^0}}$

Oppgave 3 (2 poeng)

I Norge er det ca. 5 millioner innbyggere. Hvert år produseres omtrent 150 milliarder M&M-sjokolader i verden. Tenk deg at disse sjokoladene ble delt likt mellom innbyggerne i Norge.

Omtrent hvor mange M&M-sjokolader ville hver innbygger ha fått? Skriv svaret på standardform.

$$\frac{150 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^6} = 30 \cdot 10^{9-6} = 30 \cdot 10^3 = 3{,}0 \cdot 10^4$$

<u>Hver innbygger ville ha fått omtrent $3{,}0 \cdot 10^4$ M&M-sjokolader.</u>

Oppgave 4 (2 poeng)

Regn ut

$$\frac{(2a)^4 \cdot 2^{-1}}{8a^2} = \frac{16a^4}{16a^2} = a^{4-2} = \underline{\underline{a^2}}$$

Oppgave 5 (2 poeng)

I tabellen nedenfor ser du resultatene fra en pilkastkonkurranse.

Poeng	Antall spillere
$[0,40\rangle$	60
$[40,80\rangle$	20
$[80,120\rangle$	16
$[120,180\rangle$	4

Bestem den gjennomsnittlige poengsummen for spillerne.

$$\frac{\frac{0+40}{2}\cdot 60 + \frac{40+80}{2}\cdot 20 + \frac{80+120}{2}\cdot 16 + \frac{120+180}{2}\cdot 4}{60+20+16+4} = \frac{1200+1200+1600+600}{100} = \frac{4600}{100} = 46$$

<u>Den gjennomsnittlige poengsummen er 46.</u>

Oppgave 6 (4 poeng)

Whisky lagres på tønner. En tønne på 500 L fylles opp og blir plassert på lager. Hvert år fordamper omtrent 2 % av innholdet i tønnen.

a) Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å regne ut hvor mange liter whisky det vil være igjen i tønnen etter 12 år.

Whiskymengden avtar med 2 % i året. Vekstfaktoren blir da $1-\frac{2}{100}=1-0,02=0,98$

Uttrykket blir: $\underline{\underline{500\cdot 0,98^{12}}}$

b) Sett opp et uttrykk som du kan bruke til å regne ut hvor mange liter whisky som vil ha fordampet fra tønnen etter 20 år.

Uttrykket blir: $500-500\cdot 0,98^{20}=\underline{\underline{500\cdot(1-0,98^{20})}}$

En tønne har vært lagret i 25 år.

c) John påstår at halvparten av innholdet har fordampet, og at denne tønnen derfor nå inneholder 250 L. Dette begrunner han med at $25\cdot 2\%=50\%$

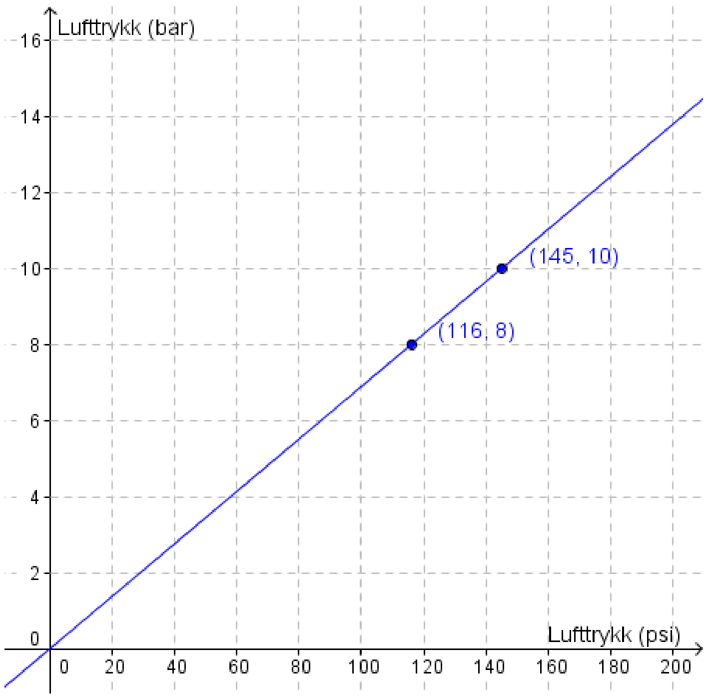
Forklar John hvorfor dette ikke er riktig.

Første året fordamper 2 % av 250 liter. Neste år fordamper 2 % av det som er nå igjen, og så videre. I og med at innholdet blir mindre og mindre, vil de to prosentene utgjør et stadig mindre volum for hvert år som går. Den totale nedgangen i prosent i løpet av de 25 årene blir derfor mindre enn 50 %.

Oppgave 7 (4 poeng)

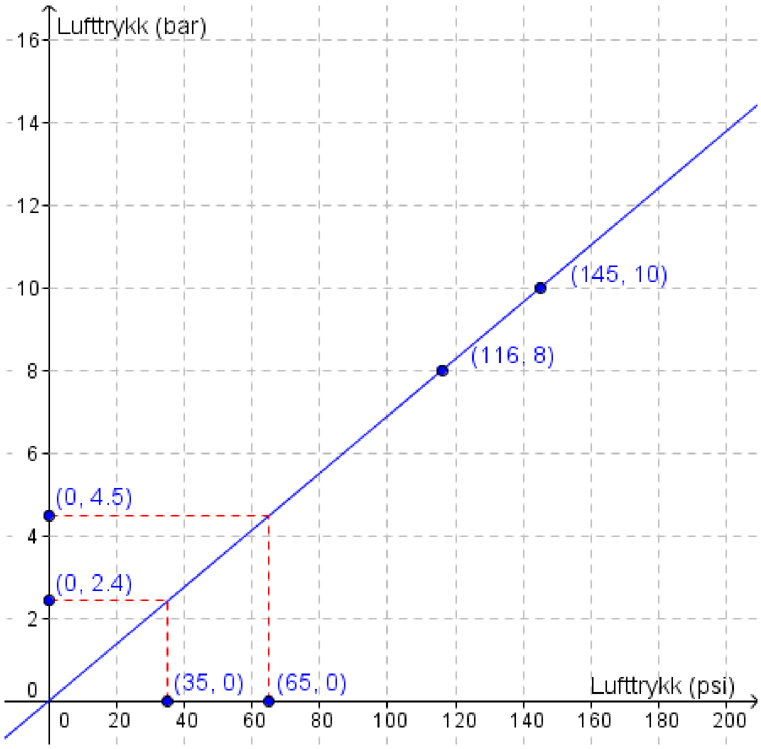
Lufttrykk kan måles i bar eller psi. Lasse har en racersykkel der det anbefalte lufttrykket i dekkene er oppgitt både i bar og i psi. Se bildet ovenfor.

a) Tegn et koordinatsystem med lufttrykk målt i psi langs x - aksen og lufttrykk målt i bar langs y - aksen. Marker verdiene fra dekket på bildet som punkter i koordinatsystemet, og tegn en rett linje gjennom punktene.



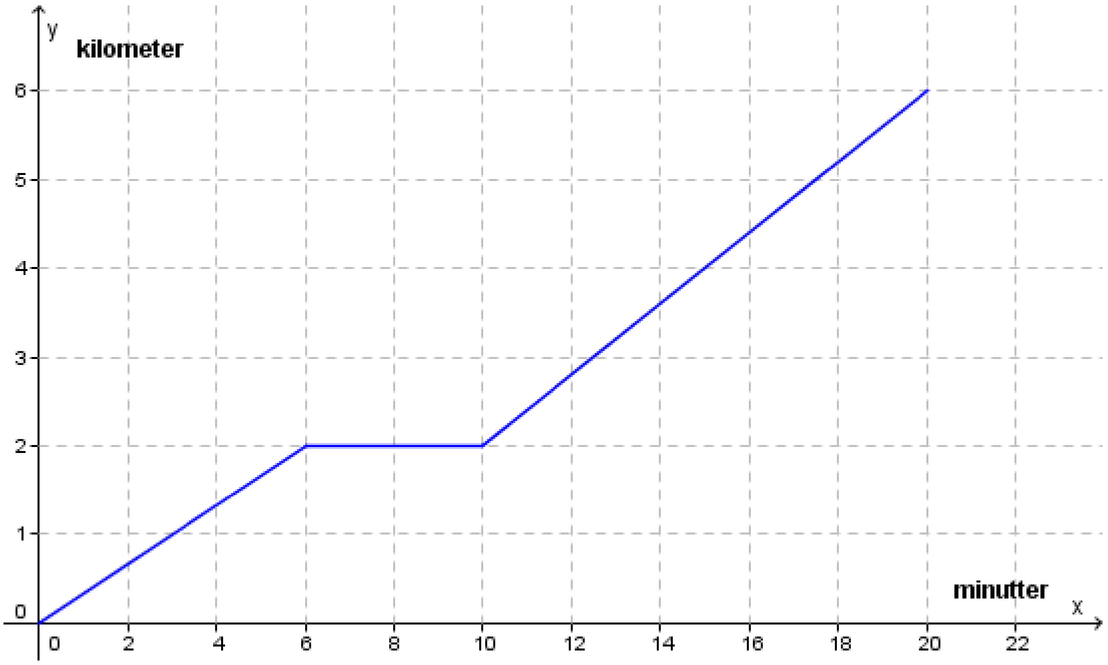
Lasse har kjøpt ny terrengsykkel. På dekkene står det at lufttrykket bør være mellom 35 og 65 psi. Han lurer på hva dette tilsvarer målt i bar.

b) Bruk linjen i oppgave a) til å finne ut hvor høyt lufttrykk målt i bar Lasse bør bruke i dekkene på terrengsykkelen.



Lasse bør bruke et lufttrykk som er mellom 2,4 og 4,5 bar.

Oppgave 8 (2 poeng)



På fredag syklet Synnøve til skolen. Ovenfor ser du en forenklet grafisk framstilling av sykkelturen.

Hva kan du si om sykkelturen ut fra grafen?

Turen varte i 20 minutter, og Synnøve syklet 6 km. Etter 6 minutter hadde hun kommet 2 km, og hun tok da en pause på fire minutter før hun syklet videre. Etter pausen syklet hun litt raskere enn før pausen.

Oppgave 9 (4 poeng)

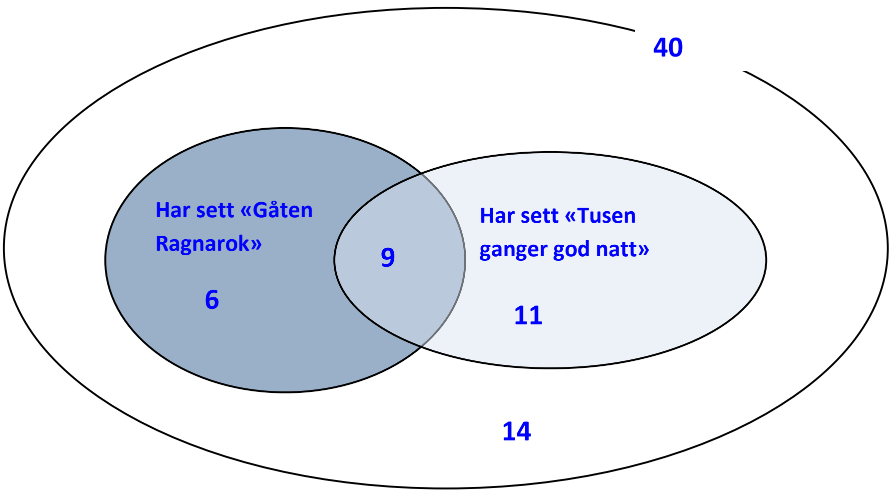
En filmklubb har 40 medlemmer. Halvparten av medlemmene har sett filmen «Gåten Ragnarok», mens 15 av medlemmene har sett filmen «Tusen ganger god natt». 14 av medlemmene har ikke sett noen av de to filmene.

a) Systematiser opplysningene ovenfor i en krysstabell eller i et venndiagram.

Krysstabell:

	Har sett «Gåten Ragnarok»	Har ikke sett «Gåten Ragnarok»	Sum
Har sett «Tusen ganger god natt»	**9**	**6**	**15**
Har ikke sett «Tusen ganger god natt»	**11**	**14**	**25**
Sum	**20**	**20**	**40**

Venndiagram:



Vi velger ut et tilfeldig medlem av filmklubben.

b) Bestem sannsynligheten for at medlemmet har sett minst én av de to filmene.

$$P(\text{minst én av de to filmene}) = 1 - P(\text{ingen av filmene}) = 1 - \frac{14}{40} = \frac{26}{40} = \underline{\underline{\frac{13}{20}}}$$

c) Bestem sannsynligheten for at et medlem som har sett «Tusen ganger god natt», også har sett «Gåten Ragnarok».

$$P(\text{Gåten Ragnarok} \mid \text{Tusen ganger god natt}) = \underline{\underline{\frac{9}{20}}}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

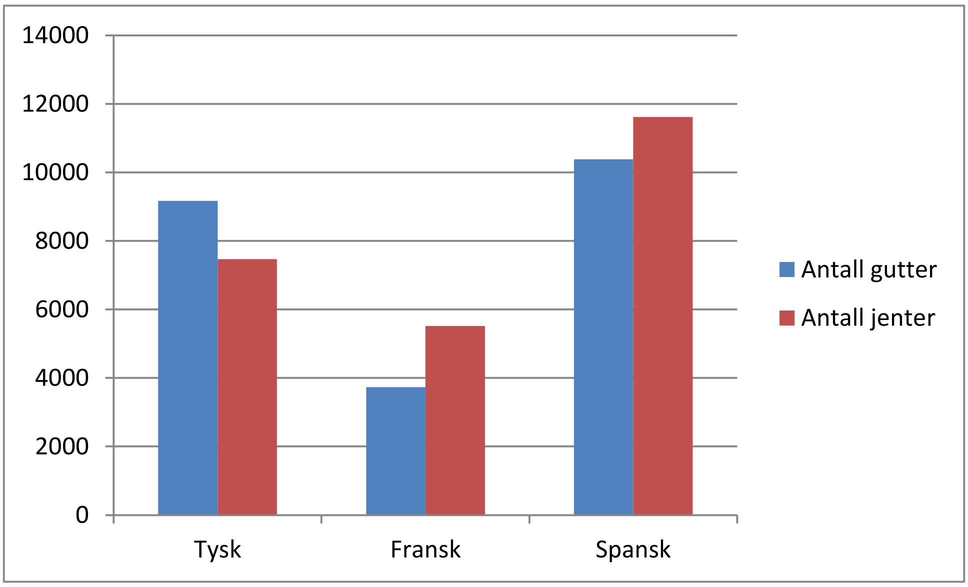
Fremmedspråk	Antall gutter	Antall jenter
Tysk	9165	7467
Fransk	3729	5515
Spansk	10385	11619

Tabell 1

Tabell 1 viser hvor mange elever i Norge som valgte fremmedspråkene tysk, fransk og spansk på 8. trinn skoleåret 2012/2013.

a) Lag et passende diagram som illustrerer opplysningene gitt i tabell 1.

Jeg skriver inn tabellen i Excel, markerer området og velger *Sett inn + Stolpe*:



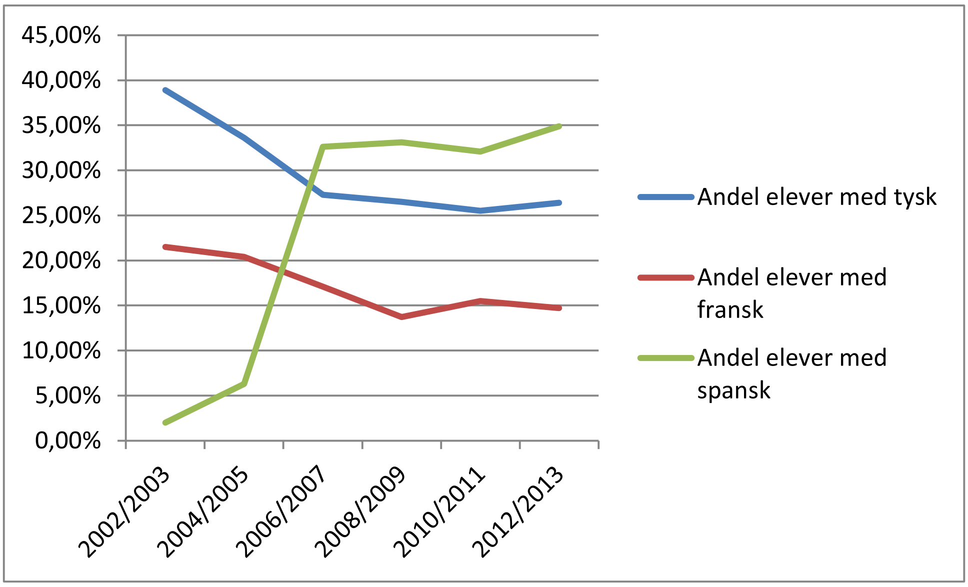
Skoleår	Andel elever med tysk	Andel elever med fransk	Andel elever med spansk
2002/2003	38,9 %	21,5 %	2,0 %
2004/2005	33,6 %	20,4 %	6,3 %
2006/2007	27,3 %	17,1 %	32,6 %
2008/2009	26,5 %	13,7 %	33,1 %
2010/2011	25,5 %	15,5 %	32,1 %
2012/2013	26,4 %	14,7 %	34,9 %

Tabell 2

Tabell 2 viser andelen elever på 8. trinn som valgte tysk, andelen som valgte fransk, og andelen som valgte spansk som fremmedspråk noen skoleår i perioden 2002 – 2013.

b) Lag et kurvediagram (linjediagram) som illustrerer opplysningene gitt i tabell 2.

Jeg skriver inn tabellen i Excel, markerer området og velger *Sett inn + Linje*:



c) Omtrent hvor mange elever var det på 8. trinn skoleåret 2012/2013?

Skoleåret 2012/2013 valgte $9165+7467=16632$ elever tysk. Dette er 26,4 % av elevene på 8. trinn.

Går «veien om 1»:

$$\frac{16632}{26,4}\cdot 100=63000$$

<u>Det var omtrent 63 000 elever på 8. trinn skoleåret 2012/2013</u>

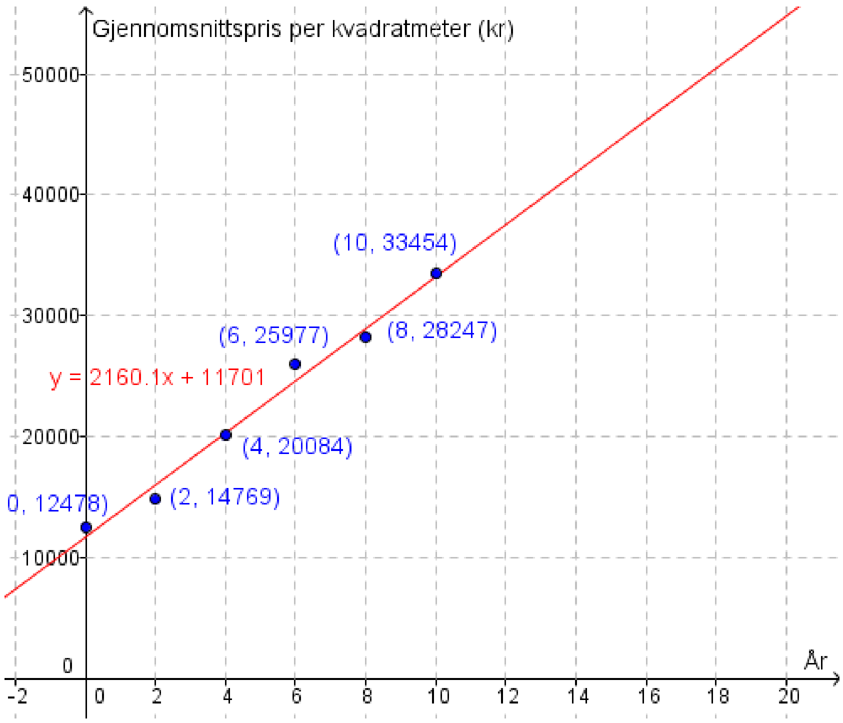
Oppgave 2 (6 poeng)

År	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Gjennomsnittspris per kvadratmeter (kroner)	12 478	14 769	20 084	25 977	28 247	33 454

Tabellen ovenfor viser gjennomsnittspris per kvadratmeter for eneboliger i Stavanger noen år i perioden 2002–2012.

a) La *x* være antall år etter 2002, og bestem den lineære modellen som passer best med de oppgitte verdiene.

Jeg bruker GeoGebra, og legger inn (0, 12479), (2, 14769) som punkter i et koordinatsystem. Deretter bruker jeg kommandoen *Beste tilpasset linje*, og markerer punktene:

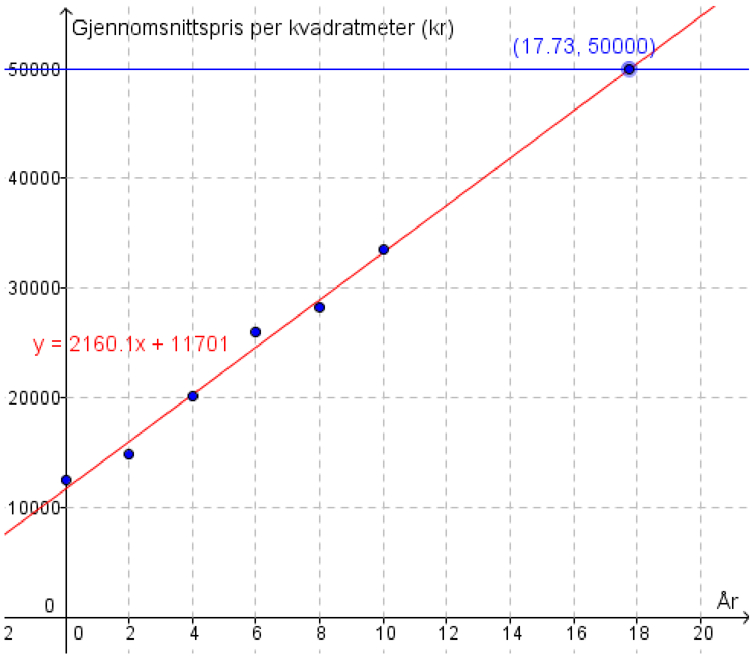


Den lineære modellen som passer best med de oppgitte verdiene er $y = 2160{,}1x + 11701$.

b) Når vil gjennomsnittsprisen for en enebolig i Stavanger på 200 m^2 passere 10 millioner kroner dersom prisutviklingen fortsetter?

Pris per kvadratmeter $= \dfrac{10000000}{200} = 50000$

Jeg tegner linjen *y* = 50000, og finner skjæringspunktet mellom denne og linja jeg fant i a) ved å bruke kommandoen *Skjæring mellom to objekt.*



I følge denne modellen vil prisen for en enebolig på 200 m^2 passere 10 millioner kroner i løpet av 2019.

En eiendomsmegler antok i 2012 at prisen på eneboliger i Stavanger ville øke med 20 % i perioden 2012–2015.

c) Hvor stor prosentvis økning tilsvarer dette per år?

Med en prisøkning på 20 % i perioden vil en enebolig i 2015 koste $33454kr \cdot 1{,}20 = 40144{,}8kr$

For å finne ut prosentvis økning per år må jeg finne vekstfaktoren, *x*, i uttrykket $33454kr \cdot x^3 = 40144{,}8kr$

Bruker CAS i GeoGebra:

1	33454*x³=40144.8
○	NLøs: $\{x = 1.063\}$

Dette tilsvarer en prosentvis økning på 6,3 % i året

Oppgave 3 (4 poeng)

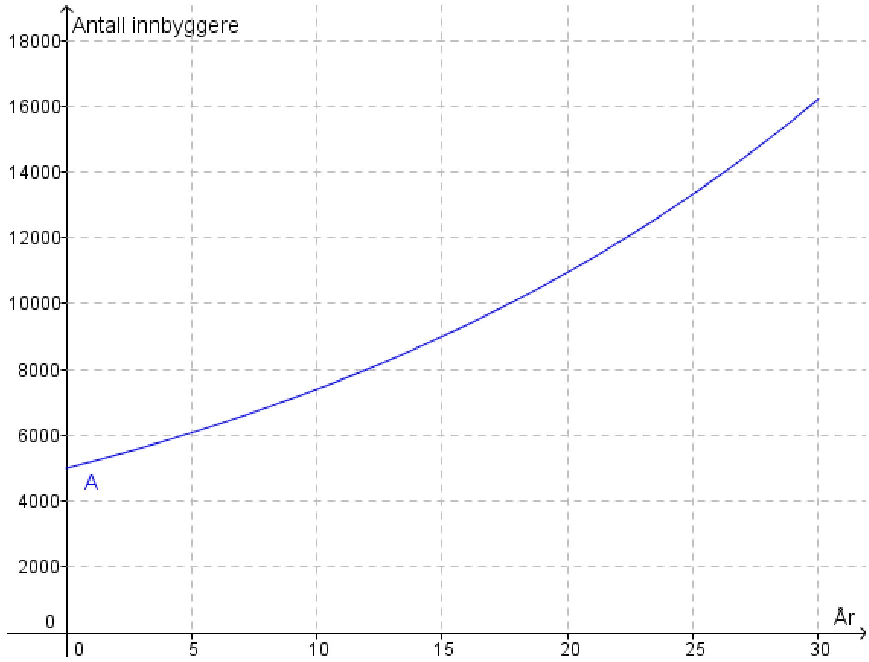
Bygda Alvfjord har i dag 5000 innbyggere. Man regner med at innbyggertallet vil øke med 4 % hvert år.

a) Forklar at funksjonen *A* gitt ved $A(x) = 5000 \cdot 1,04^x$ kan brukes som modell for antall innbyggere i Alvfjord om *x* år.

Innbyggertallet øker med 4 % hvert år. Vekstfaktoren til en prosentvis økning på 4 % er 1,04. Ved å multiplisere denne med 5000 vil en få innbyggertallet etter ett år. Ved å opphøye vekstfaktoren i *x*, kan vi finne innbyggertallet etter *x* antall år.

b) Tegn grafen til *A* for $0 \leq x \leq 30$

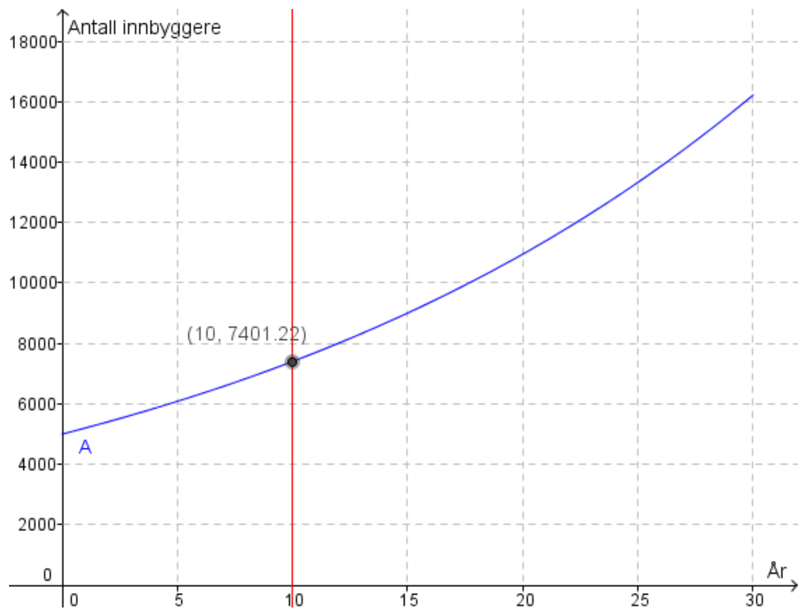
Tegner grafen i GeoGebra:



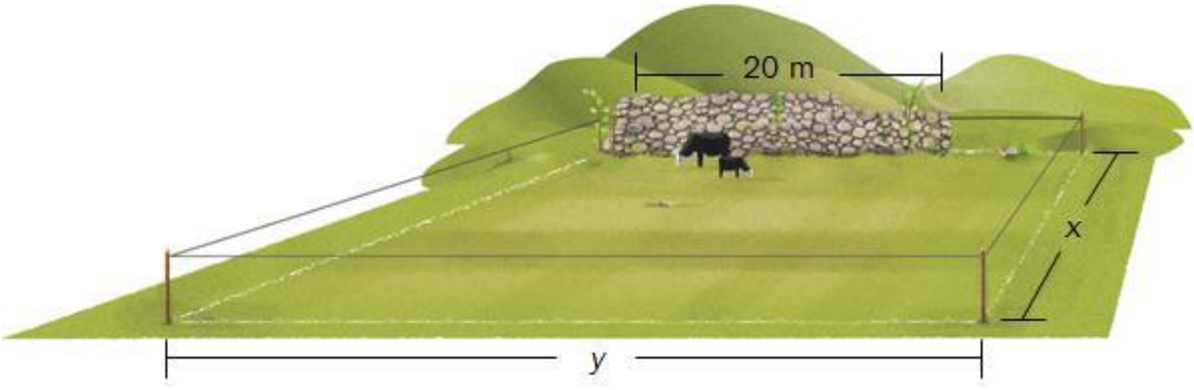
c) Hvor mange innbyggere vil det være i Alvfjord om 10 år ifølge modellen i oppgave a)?

Jeg tegner linjen *x* = 10, og finner skjæringspunktet mellom denne og modellen i a) ved å bruke kommandoen *Skjæring mellom to objekt.*

I følge modellen vil det om 10 år være ca. 7400 innbyggere i Alvsfjord



Oppgave 4 (4 poeng)



Ola har 120 m gjerde. Han skal gjerde inn et område. Området skal ha form som et rektangel med lengde *x* meter og bredde y meter der $y > 20$. Langs den ene siden av området står det en mur. Muren er 20 m lang. Ola trenger ikke gjerde langs muren.
Se skissen ovenfor.

a) Bestem en modell som viser sammenhengen mellom lengden *x* og arealet *A(x)* av området.

Jeg setter først opp et uttrykk for antall meter gjerde Ola har: $2x + y + (y - 20) = 120$

Dette gir oss:

$$\begin{aligned} 2x + y + y - 20 &= 120 \\ 2x + 2y &= 140 \\ x + y &= 70 \\ y &= 70 - x \end{aligned}$$

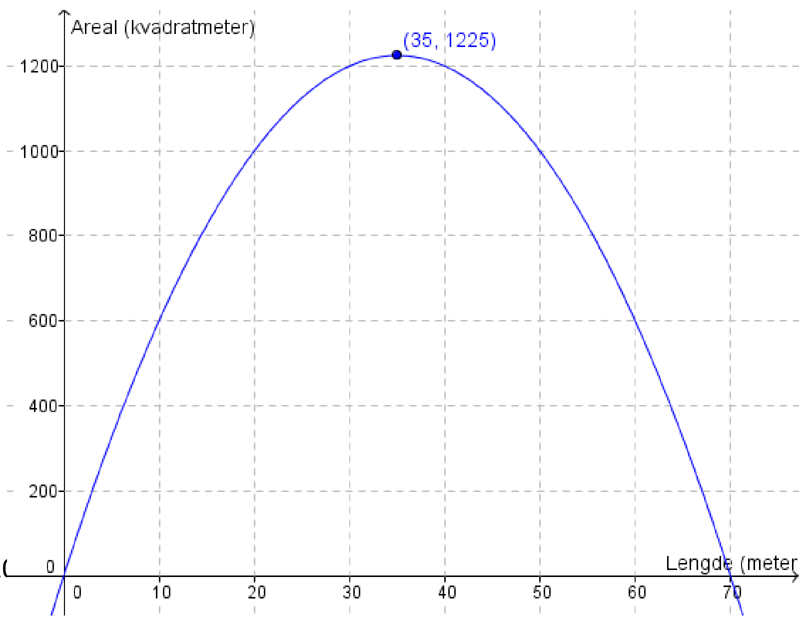
$$A(x) = x \cdot y$$
$$A(x) = \underline{\underline{x \cdot (70 - x)}}$$

b) Bestem *x* slik at arealet av området blir størst mulig.
Hvor stort blir området da?

Jeg tegner grafen til *A(x)* i GeoGebra, og finner toppunktet ved å skrive inn *Ekstremalpunkt[A]* i innskrivingsfeltet:

<ins>Området blir størst mulig når *x* = 35.</ins>

<ins>Arealet blir da 1225 m^2.</ins>



Oppgave 5 (4 poeng)

En undersøkelse viser at 9 % av norske menn bruker bunad på nasjonaldagen. Vi velger tilfeldig ut tre norske menn.

a) Hva er sannsynligheten for at ingen av dem bruker bunad på nasjonaldagen?

$$P(\text{bruker ikke bunad}) = 1 - P(\text{bruker bunad}) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

$$P(\text{ingen bruker bunad}) = 0{,}91^3 = 0{,}754$$

Sannsynligheten for at ingen av dem bruker bunad er 75,4 %.

b) Hva er sannsynligheten for at nøyaktig én av dem bruker bunad på nasjonaldagen?

Sannsynligheten for at én bruker bunad mens de to andre ikke gjør det er $0{,}03 \cdot 0{,}91^2$. Det er tre måter dette kan skje på, i og med at vi velger ut tre menn. Vi multipliserer derfor med 3.

$$P(\text{nøyaktig én bruker bunad}) = 3 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}91^2 = 0{,}075$$

Sannsynligheten for at nøyaktig én av dem bruker bunad er 7,5 %.

Oppgave 6 (5 poeng)

Izabela Duda fra Oppsal ble toppskårer i Eliteserien i håndball for kvinner i sesongen 2012/2013. Nedenfor ser du hvor mange mål hun skåret i hver av de 22 kampene.

6	1	4	8	8	17	7	12	1	8	4
7	10	13	14	7	9	7	11	12	7	4

a) Hvor mange mål skåret hun i gjennomsnitt per kamp?

Jeg legger inn tallene i et regneark i GeoGebra og bruker kommandoen *Gjennomsnitt* for å beregne gjennomsnittet:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	6	1	4	8	8	17	7	12	1	8	4
2	7	10	13	14	7	9	7	11	12	7	4
3											
4	8.05										

Izabela Duda skåret i gjennomsnitt ca. 8 mål per kamp.

En annen spiller skåret i gjennomsnitt 5 mål per kamp i de 22 kampene. Standardavviket hennes for antall mål per kamp var 2,5.

b) Sammenlikn denne spillerens prestasjoner med Izabela Dudas.

Jeg beregner standardavviket til Izabela ved å markere tallene i tabellen og bruke kommandoen *Lag liste med punkt*. Listen får navnet Liste1, og jeg finner så standardavviket i CAS:

1	Standardawik[Liste1]
○	≈ **3.9**

Izabela skårer i snitt flere mål per kamp, men i og med at hun har et høyere standardavvik, er hun mer ujevn i prestasjonene enn den andre spilleren.

Izabela Duda skåret noen av målene på straffekast.
Tabellen viser kumulativ frekvens for antall mål hun skåret på straffekast i løpet av de 22 kampene.

Antall mål på straffekast	Kumulativ frekvens
0	8
1	14
2	17
3	21
4	22

c) I hvor mange kamper skåret hun tre mål på straffekast?
Hvor mange mål skåret hun på straffekast i løpet av de 22 kampene?

$$21-17=4$$

Izabela skåret tre mål i fire kamper.

$$1\cdot(14-8)+2\cdot(17-14)+3\cdot(21-17)+4\cdot(22-21)=6+6+12+4=28$$

Hun skåret i alt 28 mål på straffekast i løpet av de 22 kampene.

Oppgave 7 (7 poeng)

F_2

F_3

F_4

Thea lager figurer av små sjokolader. Figurene ovenfor har hun kalt F_2, F_3 og F_4

a) Hvor mange små sjokolader vil det være i figuren F_5 ?

I den nederste raden vil det være 5 sjokolader, i den nest nederste 6, så 7, så 8, så 9, så 8, så 7, så 6 og så 5.

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 9 = 61$$

I F_5 vil det være 61 sjokolader.

Thea vil sette opp en modell som viser hvor mange små sjokolader hun trenger for å lage enda større figurer. Hun får en god idé og lager figuren F_4 på nytt.

F_4

Hun regner nå ut at antall små sjokolader i figuren F_4 er $3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 37$

b) Vis hvordan Thea kan bestemme antall små sjokolader i F_3 og F_5 ved å regne på samme måte.

$F_3 : 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = \underline{\underline{19}}$

$F_5 : 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = \underline{\underline{61}}$

c) Hvor mange små sjokolader trenger hun for å lage figuren F_{10} ?
Sett opp en modell som Thea kan bruke for å bestemme antall små sjokolader i figuren F_n uttrykt ved *n*.

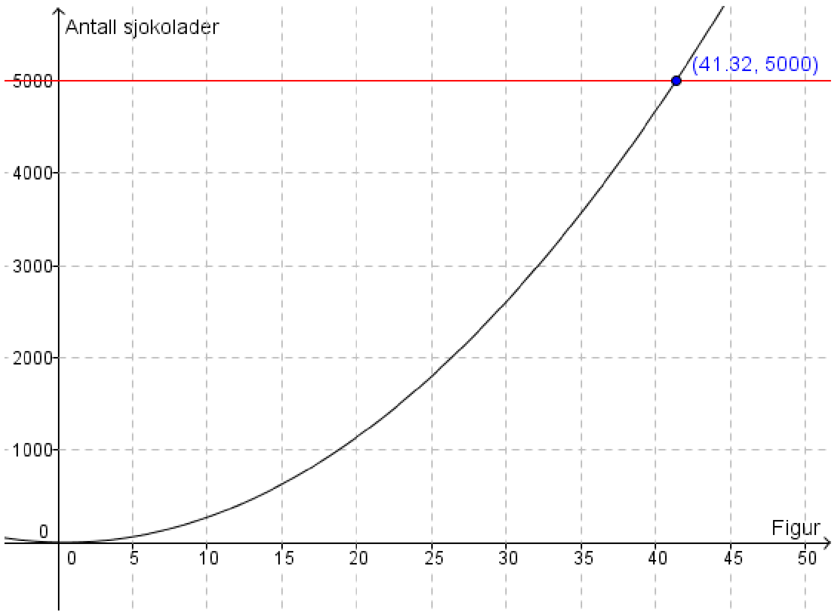
$F_{10}: 9\cdot 9 + 9\cdot 10 + 10\cdot 10 = 271$

Thea trenger 271 små sjokolader for å lage figuren $\underline{\underline{F_{10}}}$.

$F(n) = (n-1)(n-1) + (n-1)\cdot n + n\cdot n$
$F(n) = \underline{\underline{(n-1)^2 + n(n-1) + n^2}}$

d) Hva er den største figuren F_n Thea kan lage dersom hun har 5000 små sjokolader?

Tegner grafen til F(n) og linjen y = 5000. Finner skjæringspunktet ved å bruke kommandoen *Skjæring mellom to objekt*:



Den største figuren Thea kan lage er $\underline{\underline{F_{41}}}$.

Bildeliste

Kilder for bilder, tegninger osv.:

- Izabela Duda: http://oppsal.topphandball.no/kamp-om-kvartfinale/ (12.10.2013)
- Bilder, tegninger og grafiske framstillinger i oppgaveteksten: Utdanningsdirektoratet