Løsningene er laget av

2P-Y eksamen våren 2016 løsningsforslag

DEL 1
Uten hjelpemidler

Tid: 2 timer
Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1 (3 poeng)

Dato	Temperatur
01.03	2 °C
02.03	0 °C
03.03	–4 °C
04.03	–6 °C
05.03	2 °C
06.03	6 °C

Guro målte temperaturen utenfor hytta de seks første dagene i mars. Se tabellen ovenfor.

Bestem variasjonsbredden, gjennomsnittet og medianen for temperaturmålingene.

Variasjonsbredde: $6^{\circ}\text{C} - (-6^{\circ}\text{C}) = \underline{\underline{12^{\circ}\text{C}}}$

Gjennomsnitt: $\dfrac{2^{\circ}\text{C} + 0^{\circ}\text{C} + (-4)^{\circ}\text{C} + (-6)^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C} + 6^{\circ}\text{C}}{6} = \underline{\underline{0^{\circ}\text{C}}}$

Temperaturen i stigende rekkefølge: $-6^{\circ}\text{C} \;\; -4^{\circ}\text{C} \;\; 0^{\circ}\text{C} \;\; 2^{\circ}\text{C} \;\; 2^{\circ}\text{C} \;\; 6^{\circ}\text{C}$

Medianen: $\dfrac{0^{\circ}\text{C} + 2^{\circ}\text{C}}{2} = \underline{\underline{1^{\circ}\text{C}}}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Det er 7,5 milliarder mennesker på jorda. Anta at hvert menneske trenger 2 L drikkevann hver dag.

Omtrent hvor mange liter drikkevann vil da alle menneskene på jorda til sammen trenge hver måned? Skriv svaret på standardform.

Regner at det er 30 dager i en måned: $7{,}5\cdot 10^9\cdot 2\cdot 30=\underline{\underline{4{,}50\cdot 10^{11}}}$

Oppgave 3 (2 poeng)

I butikk A koster en vare 150 kroner. I butikk B koster den samme varen 120 kroner.

a) Hvor mange prosent høyere er prisen i butikk A sammenlignet med prisen i butikk B?

$$\frac{150-120}{120}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=25\%$$

Prisen i butikk A er 25 % høyere sammenlignet med prisen i butikk B.

b) Hvor mange prosent lavere er prisen i butikk B sammenlignet med prisen i butikk A?

$$\frac{150-120}{150}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=20\%$$

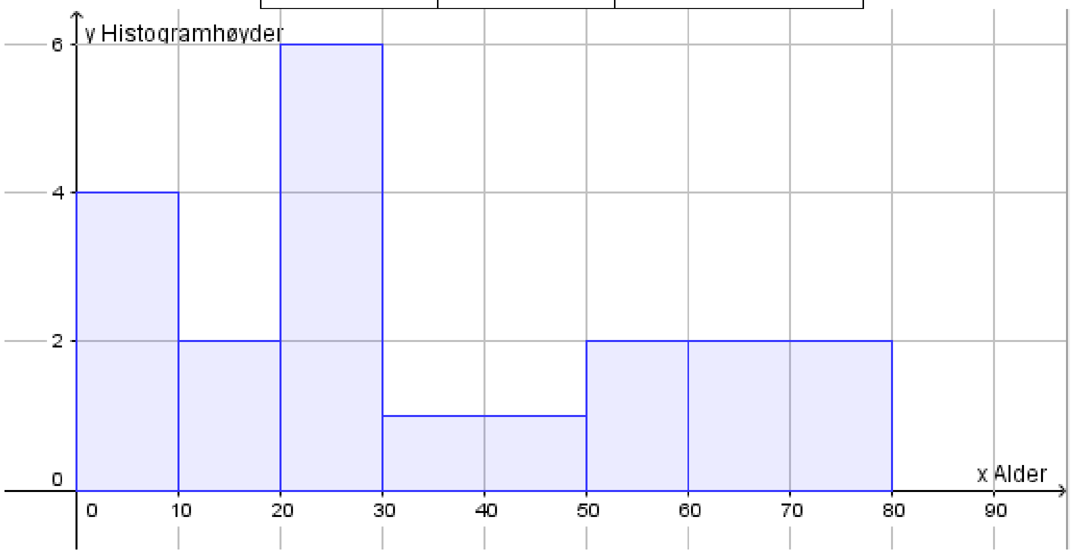
Prisen i butikk B er 20 % lavere sammenlignet med prisen i butikk A.

Oppgave 4 (4 poeng)

Tabellen ovenfor viser aldersfordelingen for de 200 personene som bor i blokk Z på Tirilltoppen.

a) Lag et histogram som viser aldersfordelingen for personene som bor i blokk Z.
Regner ut histogramhøyde, og tegner et histogram,

Alder	Frekvens	Histogramhøyde $= \frac{\text{frekvens}}{\text{klassebredde}}$
$[0,10\rangle$	40	$\frac{40}{10}=4$
$[10,20\rangle$	20	$\frac{20}{10}=2$
$[20,30\rangle$	60	$\frac{60}{10}=6$
$[30,50\rangle$	20	$\frac{20}{20}=1$
$[50,60\rangle$	20	$\frac{20}{10}=2$
$[60,80\rangle$	40	$\frac{40}{20}=2$
Sum	200	



b) Bestem gjennomsnittsalderen for personene som bor i blokka.

$$\frac{(40\cdot5)+(20\cdot15)+(60\cdot25)+(20\cdot40)+(20\cdot55)+(40\cdot70)}{200}=$$

$$\frac{200+300+1500+800+1100+4280}{200}=\frac{6580}{200}=33{,}5$$

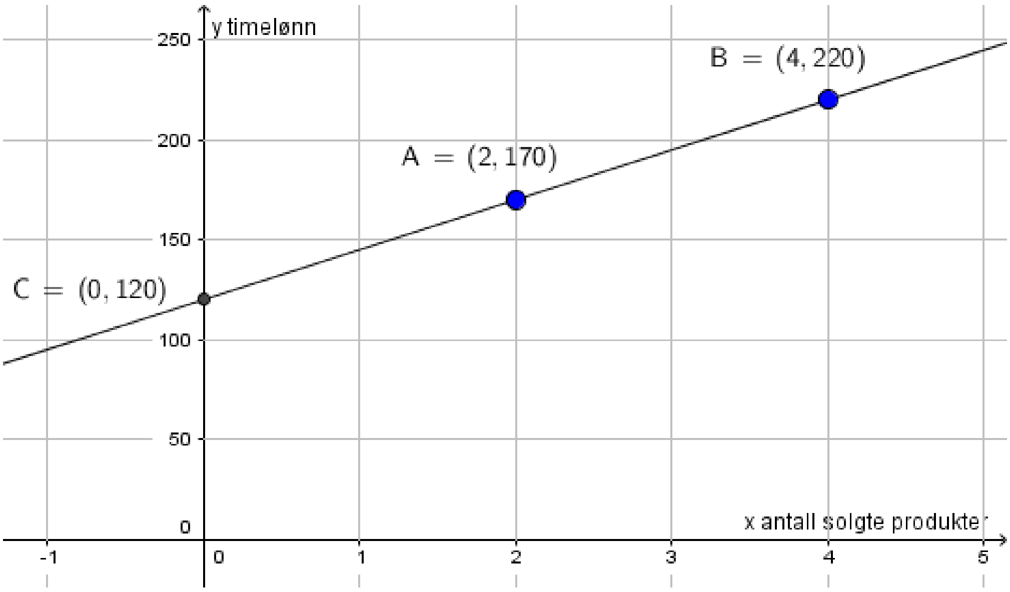
Gjennomsnittsalderen for personene i blokka er 33,5 år.

Oppgave 5 (4 poeng)

Marte er telefonselger. Hun har fast grunnlønn per time. I tillegg får hun et fast beløp for hvert produkt hun selger.

En time solgte hun 2 produkter. Hun tjente da til sammen 170 kroner.
Den neste timen solgte hun 4 produkter. Denne timen tjente hun til sammen 220 kroner.

a) Lag en grafisk framstilling som viser sammenhengen mellom hvor mange produkter Marte selger i løpet av en time, og hvor mye hun tjener denne timen.
Vi setter antall solgte produkter lik x og timelønnen som y. Så markerer vi de to punktene (2,170) og (4,220) i et koordinatsystem og trekker en linje gjennom punktene.



b) Bruk den grafiske framstillingen til å bestemme Martes grunnlønn per time og det beløpet hun får for hvert produkt hun selger.
Vi finner skjæringspunktet mellom grafen og y-aksen, se figur i a) for å finne fast timelønn.
<u>Martes faste timelønn er 120 kr.</u>
Stigningstallet til grafen er beløpet hun får per produkt hun selger

$$\frac{170-120}{2}\text{ kr} = 25\text{ kr}$$

<u>Marte tjener 25 kroner på hvert produkt hun selger.</u>

c) Hvor mange produkter må Marte selge i løpet av en time dersom hun skal tjene 370 kroner denne timen?
Løser likningen

$$370 = 120 + 25x$$
$$25x = 250$$
$$x = 10$$

Marte må selge <u>10 produkter</u> på en time for å oppnå en timelønn på 370 kr.

Oppgave 6 (2 poeng)

Sorter tallene i stigende rekkefølge

$0{,}046 \cdot 10^{11}$ $\qquad \dfrac{46}{1000000}$ $\qquad 46 \cdot 10^{-7}$

4600000 $\qquad 4{,}6 \cdot 10^{8}$ $\qquad 0{,}46 \cdot 10^{-6}$

Vi skriver opp tallene på standardform

$0{,}046 \cdot 10^{11} = 4{,}6 \cdot 10^{9}$

$\dfrac{46}{1000000} = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$

$46 \cdot 10^{-7} = 4{,}6 \cdot 10^{-6}$

$4600000 = 4{,}6 \cdot 10^{6}$

$4{,}6 \cdot 10^{8}$

$0{,}46 \cdot 10^{-6} = 4{,}6 \cdot 10^{-7}$

Tallene i stigende rekkefølge

$0{,}46 \cdot 10^{-6}$ $\qquad 46 \cdot 10^{-7}$ $\qquad \dfrac{46}{1000000}$ $\qquad 4600000$ $\qquad 4{,}6 \cdot 10^{8}$ $\qquad 0{,}046 \cdot 10^{11}$

Oppgave 7 (3 poeng)

Ole har undersøkt hvor mange land hver elev i en 2P-gruppe har besøkt.
Han har satt opp en tabell. Ovenfor ser du noen av tallene i tabellen.

Tegn av tabellen, gjør beregninger, og fyll inn tallene som mangler.
Det er 20 elever til sammen. Vi regner ut de manglende verdiene som vist i tabellen.

Antall land	Frekvens	Relativ frekvens	Kumulativ frekvens
$[1,6\rangle$	5	$\frac{5}{20}=0,25$	$20-15=5$
$[6,11\rangle$	$15-5=10$	$\frac{10}{20}=0,5$	15
$[11,16\rangle$	2	0,1	$15+2=17$
$[16,21\rangle$	$20-5-10-2-1=2$	$\frac{2}{20}=0,1$	19
$[21,26\rangle$	$20-19=1$	$\frac{1}{20}=0,05$	20

Oppgave 8 (4 poeng)

Det er 26 elever i en matematikkgruppe.

- 16 av elevene gjør leksene til hver time.
- 20 av elevene har karakteren 3 eller høyere i faget.
- 5 av elevene som ikke gjør leksene til hver time, har lavere karakter enn 3 i faget.

a) Systematiser opplysningene i teksten over i en krysstabell eller i et venndiagram.

	Gjør lekser til hver time	Gjør ikke lekser til hver time	Totalt
Har karakteren 3 eller høyere	15	5	20
Har lavere karakter enn 3	1	5	6
Totalt	16	10	26

Vi velger tilfeldig én elev fra gruppen.

b) Bestem sannsynligheten for at eleven ikke gjør leksene til hver time og har karakteren 3 eller høyere i faget.
Det er 5 elever som ikke gjør leksene og som har karakteren 3 eller høyere.

Sannsynligheten for å trekke ut en elev som ikke gjør leksene og som har karakteren 3 eller høyere er $p = \underline{\underline{\frac{5}{26}}}$.

En dag er bare de elevene som gjør leksene til hver time, til stede. Vi velger tilfeldig én av disse elevene.

c) Bestem sannsynligheten for at eleven har lavere karakter enn 3 i faget.

Det er 16 elever som gjør leksene til hver time, og det er 1 som har lavere karakter enn 3.

Sannsynligheten for å trekke ut en elev av de som gjør leksene og som har lavere karakter enn 3 er $p = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Tid: 3 timer
Hjelpemidler: Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 1 (2 poeng)

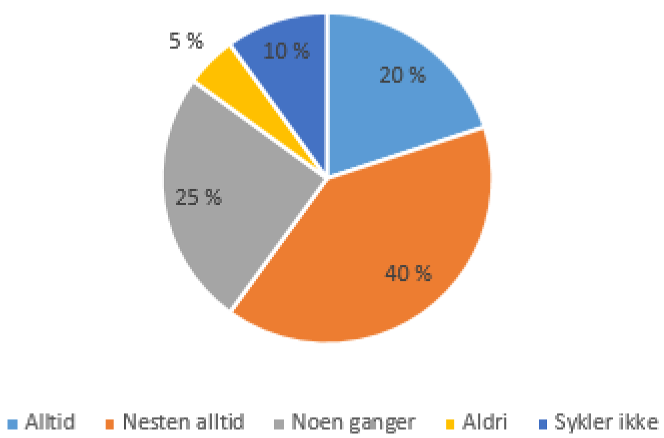
Ved en skole er det 440 elever. Elevene blir spurt om hvor ofte de bruker sykkelhjelm. Tabellen nedenfor viser resultatene.

Alltid	88
Nesten alltid	176
Noen ganger	110
Aldri	22
Sykler ikke	44

Bruk regneark til å lage et sektordiagram som illustrerer opplysningene i tabellen ovenfor. Det skal gå klart fram av diagrammet hvor mange prosent hver sektor utgjør.
Vi legger opplysningene inn i regnearket, regner ut prosentandelen som vist ved formlene.

	A	B	C
1	Alltid	88	=B1/B6
2	Nesten alltid	176	=B2/B6
3	Noen ganger	110	=B3/B6
4	Aldri	22	=B4/B6
5	Sykler ikke	44	=B5/B6
6	Totalt	440	
7			

Vi markerer området og velger kommandoen «Sett inn sektordiagram». For å få markert prosentandelen, høyreklikker vi på diagrammet og velger «Formater dataetiketter».



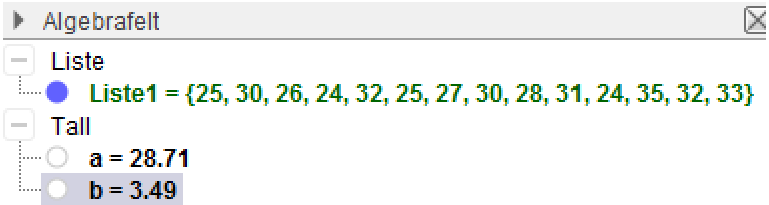
Oppgave 2 (3 poeng)

Hans og Grete går til Høgfjell hver dag. Nedenfor ser du hvor mange minutter Hans har brukt på hver tur de to siste ukene.

25 30 26 24 32 25 27 30 28 31 24 35 32 33

a) Bestem gjennomsnitt og standardavvik for datamaterialet.

Vi legger tallene inn og lager liste i regneark i GeoGebra. Deretter finner vi gjennomsnitt med kommandoen «Gjennomsnitt[Liste1]», og standardavviket med kommandoen «Standardavvik[Liste1]»,



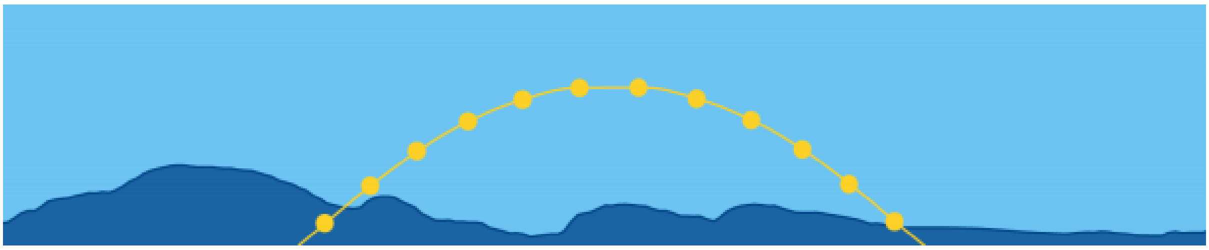
Gjennomsnittet er 28,7 og standardavviket er 3,5.

Grete har i gjennomsnitt brukt like lang tid som Hans per tur de siste 14 dagene, men standardavviket hennes er 1,2.

b) Hva kan du ut fra dette si om tidene Grete har brukt på turene, sammenlignet med tidene Hans har brukt?

Standardavviket sier noe om hvor langt de enkelte verdiene i gjennomsnitt ligger fra gjennomsnittsverdien. Grete har et standardavvik som er mye lavere enn Hans, samtidig som gjennomsnittet av tidene er den samme. Det betyr at Grete har brukt mindre variert tid på turene. Hennes turer har ligger nærmere gjennomsnittet i tidsbruk.

Oppgave 3 (6 poeng)

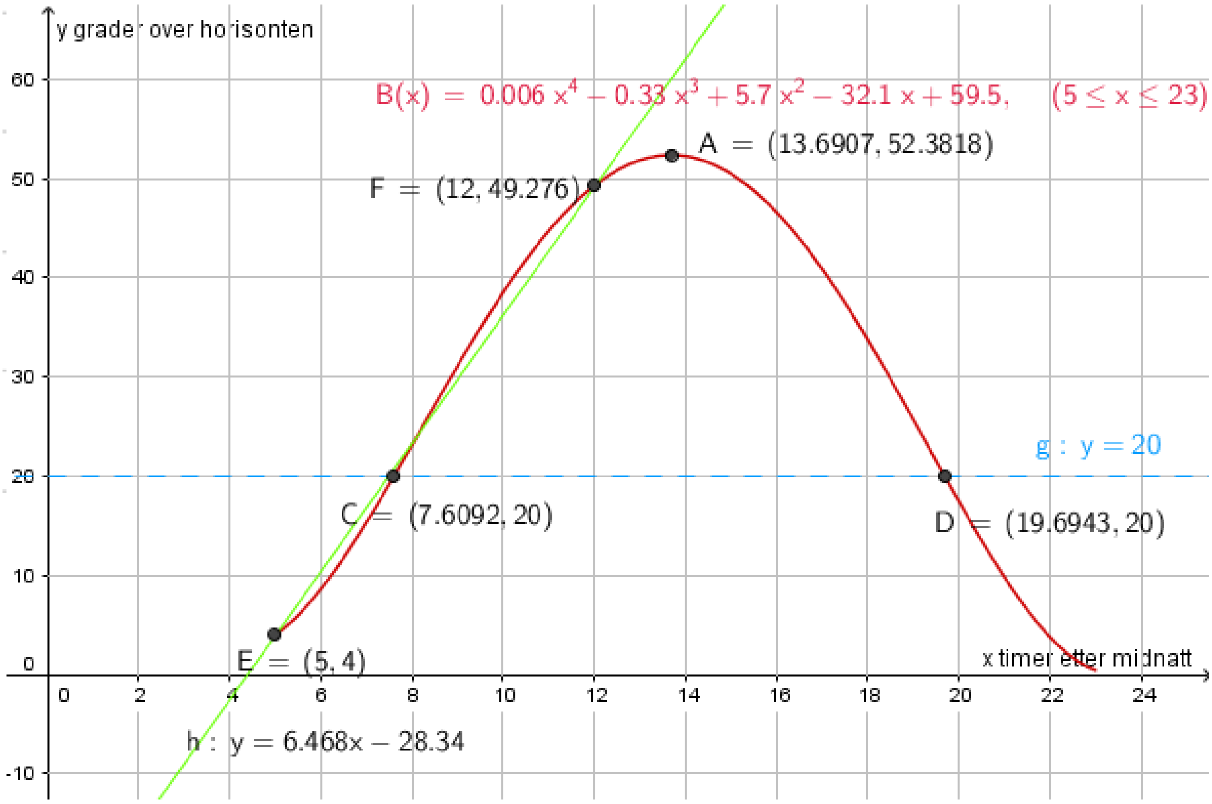


Funksjonen *B* gitt ved

$$B(x) = 0{,}006x^4 - 0{,}33x^3 + 5{,}7x^2 - 32{,}1x + 59{,}5 \qquad 5 \le x \le 23$$

viser hvor mange grader $B(x)$ sola står over horisonten *x* timer etter midnatt i Bergen 21. juni 2015.

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til *B*.
Tegner grafen i GeoGebra ved å bruke kommandoen «Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]»



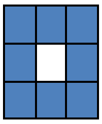
b) Hvor mange grader stod sola over horisonten da den var på sitt høyeste?
Vi bruker kommandoen «Ekstremalpunkt» og finner toppunktet A = (13,7 , 52,4). Se figur i a. Sola var på sitt høyeste 13,7 timer etter midnatt, da var den 52,4 grader over

horisonten.

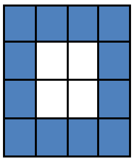
c) Når stod sola 20 grader over horisonten?
Vi legger inn linja y=20, og bruker kommandoen «Skjæring mellom to objekt», og finner skjæringspunktene C = (7,6 , 20) og D = (19,7 , 20). Se figur i a.
Sola stod 20 grader over horisonten 7,6 timer og 19,7 timer etter midnatt.

d) Hvor mange grader steg sola i gjennomsnitt per time fra klokken 05.00 til klokka 12.00?
Vi setter inn punktene E = (5,B(5) og F = (12,B(12)) i GeoGebra, og bruker kommandoen «Linje» mellom de to punktene. Vi finner gjennomsnittet ved å se på stigningstallet til linja. Se figur i a.
Gjennomsnittsøkningen er 6,5 grader per time fra klokken 05.00 til klokken 12.00.

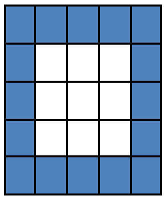
Oppgave 4 (6 poeng)



Figur 1



Figur 2



Figur 3

Tenk deg at du skal lage figurer av blå og hvite rektangler som vist ovenfor.

a) Skriv av tabellen nedenfor, og fyll den ut.

Figur	Antall hvite rektangler	Antall blå rektangler	Antall rektangler totalt
1	1	8	9
2	4	12	16
3	9	16	25
4	16	20	36
n	n^2	$4n+4$	$(n+2)^2$

b) Hvor mange hvite rektangler trenger du dersom du skal lage en figur med totalt 81 rektangler?

Løser likningen i CAS GeoGebra

CAS

1 (n+2)^2=81

Løs: $\{n = -11, n = 7\}$

For å lage en figur med 81 rektangler totalt, har vi $n = 7$.
Det vil da være $n^2 = 7^2 =$ 49 hvite rektangler.

c) Hvor mange blå rektangler trenger du dersom du skal lage en figur med totalt 1 296 rektangler?

Løser likningen i CAS GeoGebra

CAS

1 (n+2)^2=1296

Løs: $\{n = -38, n = 34\}$

2 (4*34)+4

→ 140

For å lage en figur med 1 296 rektangler, har vi $n = 34$.
Det vil da være 140 blå rektangler.

Oppgave 5 (6 poeng)

En bedrift slapp ut 20 000 tonn CO_2 i 2015. Myndighetene krever at bedriften reduserer utslippet av CO_2 med 8 % hvert år de neste 10 årene.

a) Bruk regneark til å lage en oversikt som viser antall tonn CO_2 bedriften kan slippe ut hvert år de neste 10 årene.
Vi bruker en vekstfaktor på 1 - 0,08 =0,92, og skriver inn følgende i regnearket

	A	B
1	**Utslipp av karbondioksid**	
2	**År**	**Utslipp i tonn**
3	2015	20000,00
4	2016	18400,00
5	2017	16928,00
6	2018	15573,76
7	2019	14327,86
8	2020	13181,63
9	2021	12127,10
10	2022	11156,93
11	2023	10264,38
12	2024	9443,23
13	2025	8687,77

Med formler

	A	
1	**Utslipp av karbondioks**	
2	**År**	**Utslipp i tonn**
3	2015	20000
4	=A3+1	=B3*0,92^1
5	=A3+2	=B3*0,92^2
6	=A3+3	=B3*0,92^3
7	=A3+4	=B3*0,92^4
8	=A3+5	=B3*0,92^5
9	=A3+6	=B3*0,92^6
10	=A3+7	=B3*0,92^7
11	=A3+8	=B3*0,92^8
12	=A3+9	=B3*0,92^9
13	=A3+10	=B3*0,92^10

b) Hvor mange prosent vil bedriften totalt ha redusert utslippet med i løpet av denne perioden?
Utslippet er redusert fra 20 000 til 8687,77 tonn. Vi regner i CAS GeoGebra

CAS

1 (20000-8687.77)/20000

≈ 0.57

Bedriften vil ha redusert utslippet sitt med <u>57 %</u> i løpet av 10 år.

En annen bedrift slapp ut 30 000 tonn CO_2 i 2015. Myndighetene krever at denne bedriften halverer utslippet i løpet av 5 år. Bedriften vil oppfyll myndighetenes krav ved å redusere utslippet av CO_2 med en fast prosentsats hvert år framover.

c) Bestem denne prosentsatsen.
Vi setter vekstfaktoren som x, og regner halvering av utslippet på 5 år ved å løse likningen i CAS GeoGebra

CAS

1 30000*x^5=15000

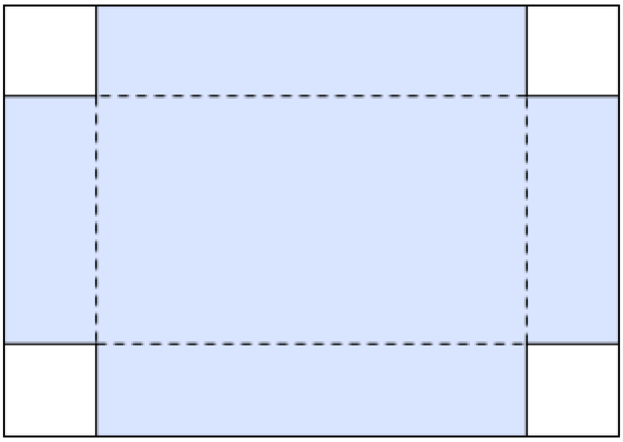
NLøs: $\{x = 0.87\}$

2 1-0.87

≈ 0.13

Bedriften må redusere utslippet med <u>13 %</u> hvert år.

Oppgave 6 (5 poeng)

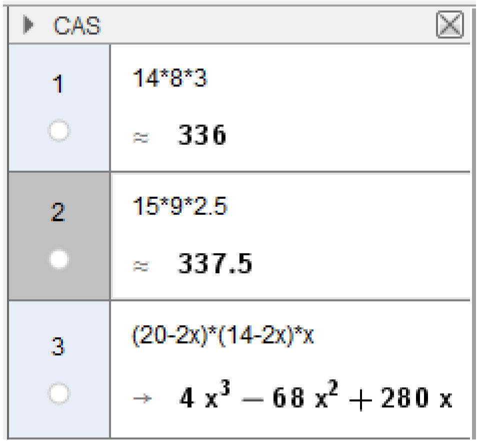


Tenk deg at du har et stykke papp med form som et rektangel. Rektangelet er 20 cm langt og 14 cm bredt. I hvert hjørne av rektangelet skal du klippe bort et kvadrat. De fire kvadratene skal være like store. Du skal så brette langs de stiplede linjene og lage en eske (uten lokk).

a) Gjør beregninger, tegn av, og fyll ut tabellen nedenfor.

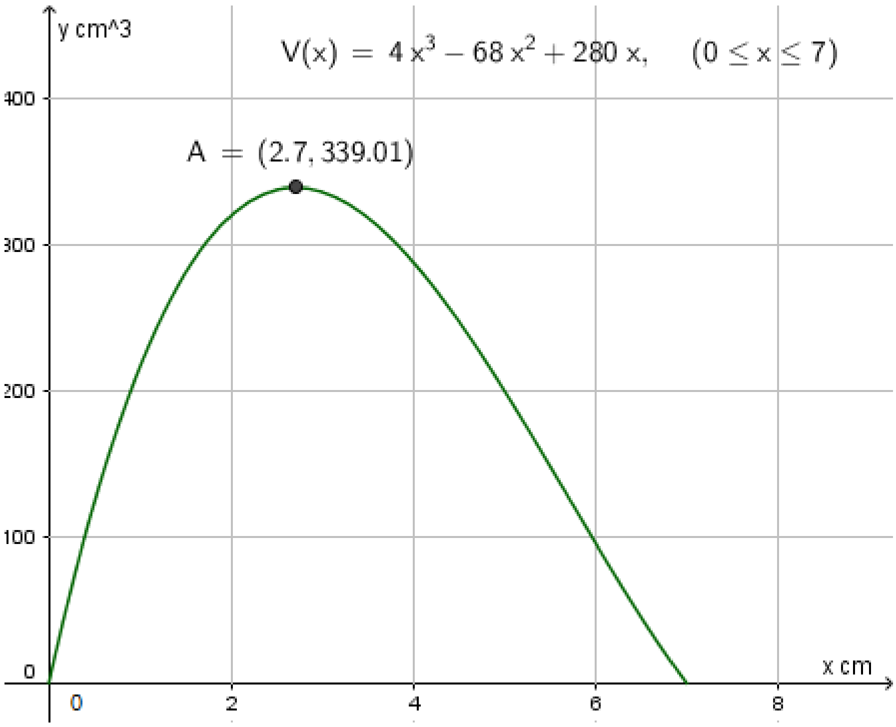
Lengden av hver side i kvadratene som klippes bort	Lengden av esken	Bredden av esken	Høyden av esken	Volumet av esken
4 cm	$20\text{ cm} - 2 \cdot 4\text{ cm}$ $= 12\text{ cm}$	$14\text{ cm} - 2 \cdot 4\text{ cm} = 6\text{ cm}$	4 cm	288 cm³
3 cm	$20\text{ cm} - 2 \cdot 3\text{ cm}$ $= 14\text{ cm}$	8 cm	3 cm	$(14 \cdot 8 \cdot 3)\text{ cm}^3 = 336\text{ cm}^3$
2,5 cm	$20\text{ cm} - 2 \cdot 2{,}5\text{ cm}$ $= 15\text{ cm}$	$14\text{ cm} - 2 \cdot 2{,}5\text{ cm} = 9\text{ cm}$	2,5 cm	$(15 \cdot 9 \cdot 2{,}5)\text{ cm}^3 = 337{,}5\text{ cm}^3$
X cm	$20\text{ cm} - 2 \cdot x\text{ cm} =$ $2(10 - x)\text{ cm}$	$14\text{ cm} - 2 \cdot x\text{ cm} = 2(7 - x)\text{ cm}$	X cm	$(20 - 2x)(14 - 2x) \cdot x\text{ cm}^3$ $(4x^3 - 68x^2 + 280x)\text{ cm}^3$

Jeg utførte utregningene i CAS GeoGebra



b) Bruk graftegner til å bestemme hvor lang hver side i kvadratene som klippes bort, må være for at volumet av esken skal være størst mulig.
Hvor stor er volumet da?

Vi definerer funksjonen $V(x)=4x^3-68x^2+280$ og tegner grafen i GeoGebra. Vi begrenser x, sidelengden på kvadratet som klippes bort, mellom 0 og 7, fordi vi ikke kan klippe bort mer enn den korteste siden som er 14 cm. Bruker kommandoen «Ekstremalpunkt[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]» for å finne toppunktet A.

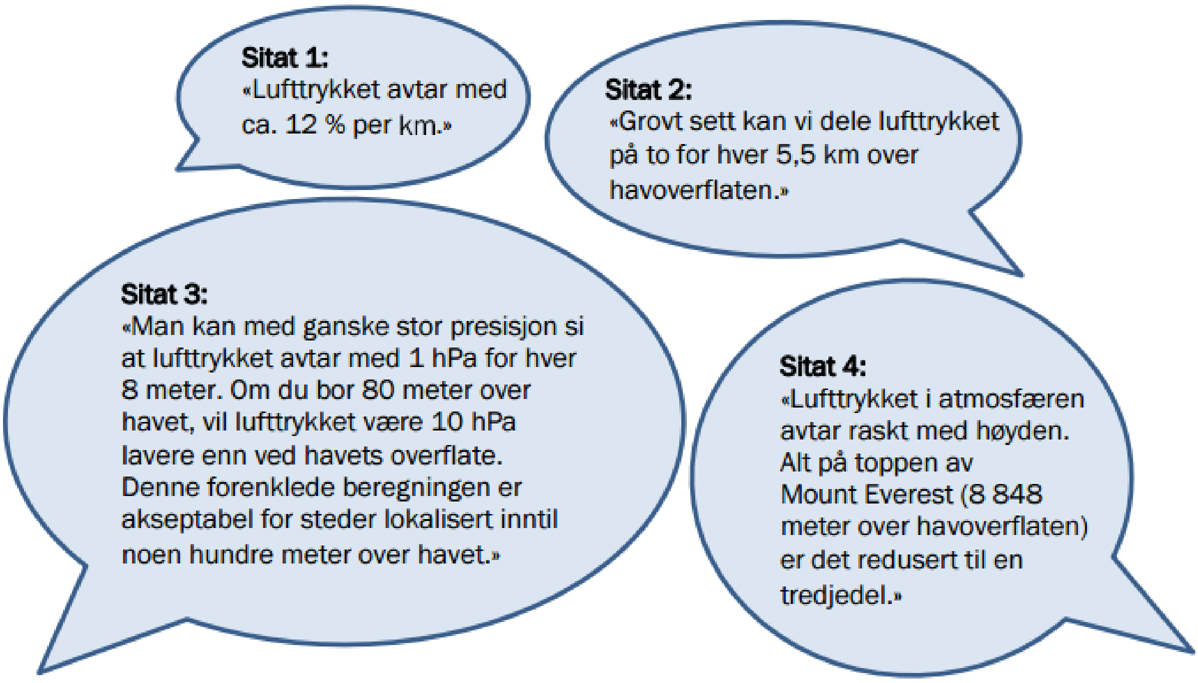


Når vi klipper bort et kvadrat med sider på <u>2,7 cm</u> i hvert hjørne, får vi en eske med et maksimalt volum på omtrent <u>339 cm^3.</u>

Oppgave 7 (8 poeng)

Ved havets overflate er lufttrykket ca. 1 000 hPa (hektopascal).

I denne oppgaven skal vi bruke sitater fra ulike nettsteder og se på noen modeller for hvor stort luftrykket er *x* kilometer over havets overflate.

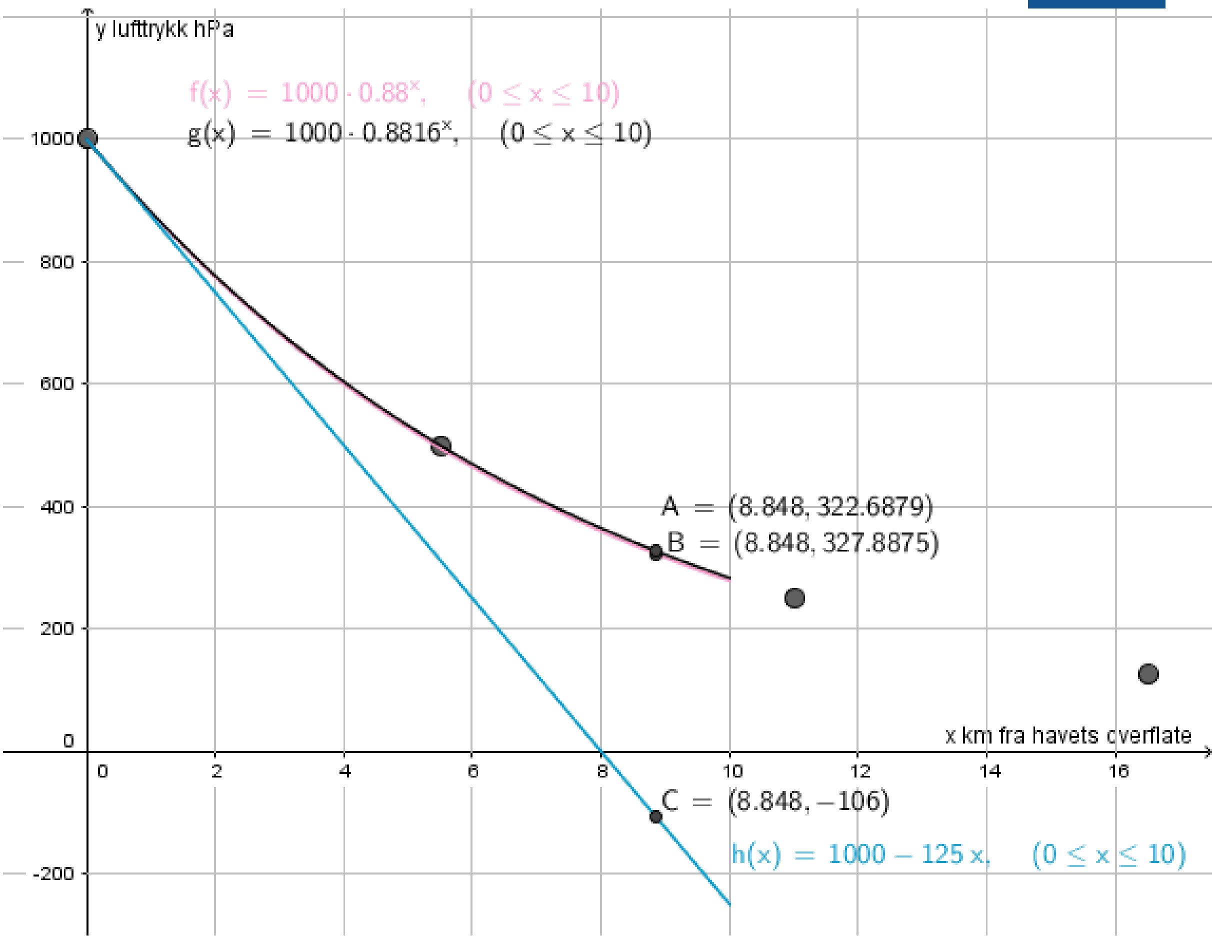


a) Forklar at vi ut fra sitat 1 kan sette opp en modell *f* der $f(x) = 1000 \cdot 0{,}88^x$

Tegn grafen til *f* for $0 \leq x \leq 10$

Vi har en eksponentiell modell, hvor startverdien på 1000 avtar med 12 %, som tilsvarer en vekstfaktor på 1 – 0,12 = 0,88, hvert år. Antall år er *x*.

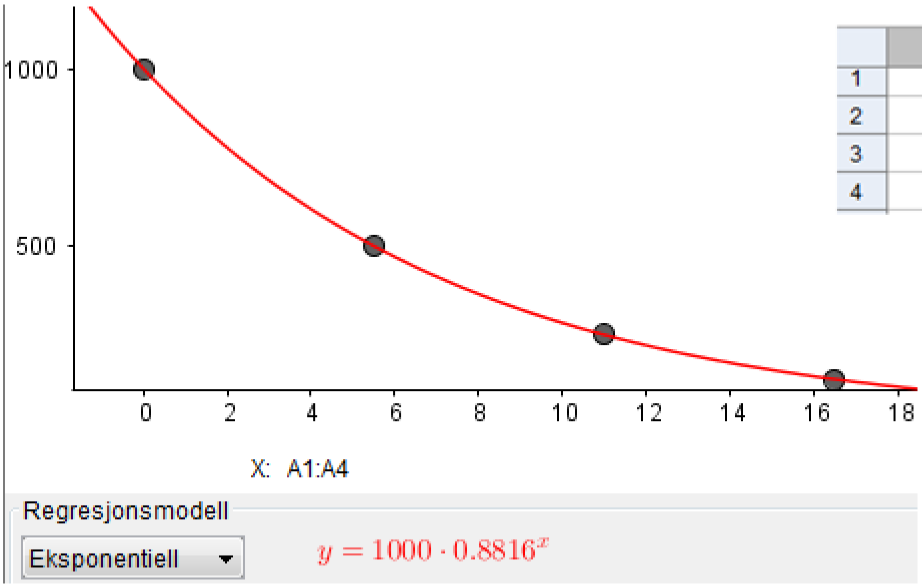
Vi bruker kommandoen «Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>» for å tegne grafen til funksjonen i GeoGebra.



b) Forklar at sitat 2 gir tabellen nedenfor. Bruk regresjon, og vis at opplysningene i tabellen gir en modell som er tilnærmet lik modell *f*. Gi denne modellen navn *g*. Tegn grafen til *g* for $0 \le x \le 10$ i samme koordinatsystem som grafen til *f*.

Høyde over havoverflaten (km)	0	5,5	11	16,5
Lufttrykk (hPa)	1 000	500	250	125

Vi vet at luftrykket er 1000 hPa 0 km fra havoverflate. Vi får da halvdelen lik 500 hPa når vi er 5,5 km fra havoverflaten, og på samme måte halvdelen av 500 hPa = 250 hPa når vi er 11 km fra havoverflaten, og 123 hPa for 16,5 km fra havoverflaten.
Setter verdiene inn i regneark i GeoGebra og bruker regresjonsanalyse med eksponentiell regresjonsmodell.



	A	B
1	0	1000
2	5.5	500
3	11	250
4	16.5	125

Vi får modellen $g(x) = 1000 \cdot 0{,}8816^x$ som tilsvarer funksjonen *f*. Vi tegner grafen i samme koordinatsystem. Se figur i a.

c) Bruk sitat 3 til å bestemme en modell *h*. Tegn grafen til *h* for $0 \leq x \leq 10$ i samme koordinatsystem som du har brukt tidligere i oppgaven.
Kommenter siste setning i sitat 3.

Luftrykket minker med $\dfrac{1 \text{ hPa}}{8 \text{ m}} = \dfrac{1000 \text{ hPa}}{8000 \text{ m}} = 125 \text{ hPa/km}$.

Vi får funksjonen $h(x) = 1000 - 125x$

Tegner funksjonen med kommandoen Funksjon[<Funksjon>, <Start>, <Slutt>]. Se figur i a.

Siste setning hentyder at modellen passer best for avstander under 1 km. Vi ser at grafen til funksjonen synker konstant og viser null lufttrykk 8 km fra havoverflate, noe som ikke stemmer. Vi er derfor enige i at modellen er en forenkling, som passer bare for x < 1.

d) Bruk hver av de tre modellene *f*, *h* og *h* til å bestemme lufttrykket 8 848 meter over havoverflaten. Sammenligne svarene du får, med sitat 4, og kommenter.

Vi markerer punktene
A = (8,848 , *f*(8,848)) = (8.848, 323),
B = (8,848 , *g*(8,848)) = (8,848, 328) og
C = (8,848 , h(8,848)) = (8.848, -106) i koordinatsystemet.

Lufttrykket 8848 meter over havet vil etter modell *f* være omtrent <u>323 hPa</u>, etter modell *g* vil det være <u>328 hPa</u>, men modell *h* gir negativt lufttrykk på <u>-106 hPa</u>.
Både modell *f* og *g* gir et lufttrykk på omtrent en tredjedel av lufttrykket ved havoverflaten. Sitatet passer godt til disse modellene. Modell *h* derimot vil ikke gjelde for denne avstanden fra havoverflaten.

Bildeliste

Solkurve: http://suncurves.com/ (15.10.2015)
Lufttrykk:
http://skolediskusjon.no/Forums/Thread.aspx?id=1160 (27.06.2015)
http://www.yr.no/artikkel/mindre-trykk-og-varme-i-hoyden-1.7297472 (27.06.2015)
http://www.yr.no/artikkel/hvordan-beregnes-lufftrykket_-1.7150434 (17.10.2015)
http://naturfag.info/5jorden/b_atmosf.htm (17.10.2015)

Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet