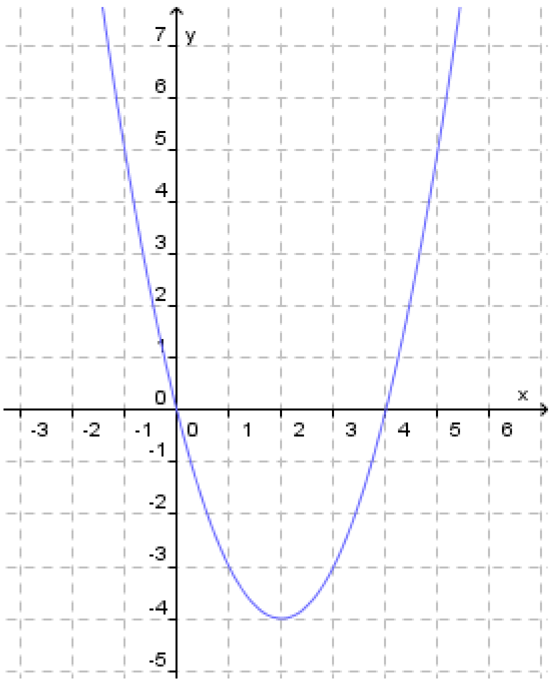
Funksjoner S1, Prøve 2 løsning

Del 1

Tid: 40 min

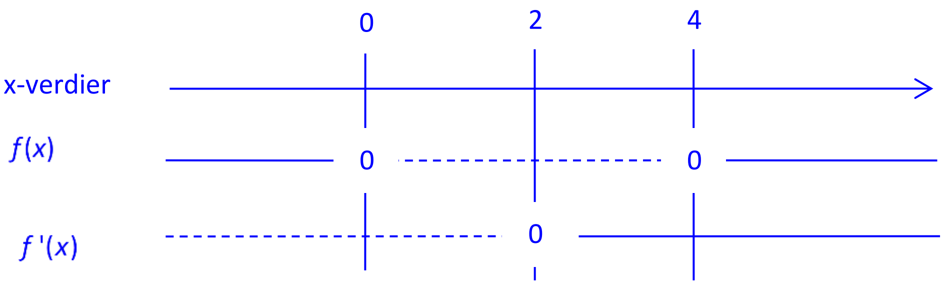
Hjelpemidler: Skrivesaker

Oppgave 1



Figuren ovenfor viser grafen til en funksjon f.

Tegn en fortegnslinje for $f\left(x\right)$ og en fortegnslinje for $f'(x)$.



Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^2 + 2x - 8$$

a) Finn $f(1)$ og bestem funksjonens nullpunkter.

$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 8 = 1 + 2 - 8 = \underline{\underline{-5}}$

Vi finner nullpunktene:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \underline{\underline{-4}} \vee x = \underline{\underline{2}}$$

b) Bestem koordinatene til skjæringspunktet med y-aksen, likningen for symmetrilinja og koordinatene til bunnpunktet.

$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8$

Grafen skjærer y-aksen i $\underline{\underline{(0, -8)}}$.

Symmetrilinje

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-2}{2 \cdot 1}$$

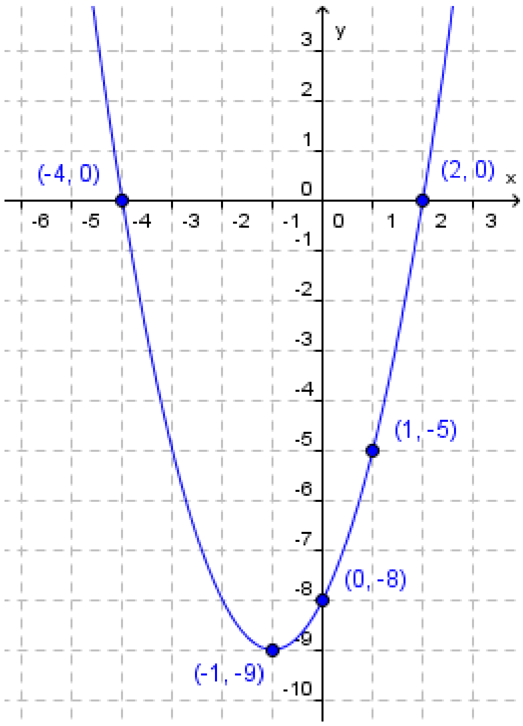
$$\underline{\underline{x = -1}}$$

Bunnpunkt

$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$

Bunnpunktet er $\underline{\underline{(-1, -9)}}$.

c) Tegn grafen til f i et koordinatsystem.



d) Finn likningen for tangenten til grafen i punktet $(-2,-8)$.
Tegn denne tangenten i samme koordinatsystem som grafen til f.

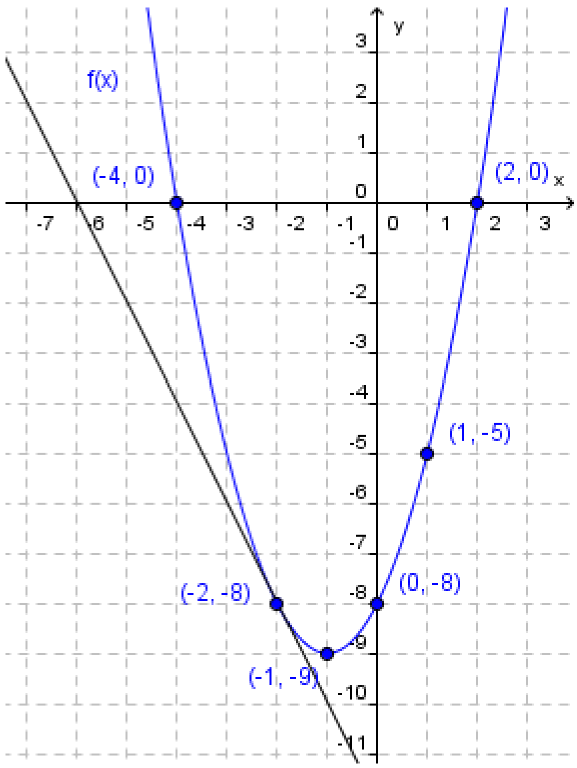
Vi finner stigningstallet:

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(-2) = 2\cdot(-2) + 2 = -2$

Vi finner likningen for tangenten:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$y - (-8) = -2(x - (-2))$$
$$y + 8 = -2(x + 2)$$
$$y = -2x - 4 - 8$$
$$y = \underline{\underline{-2x - 12}}$$



Oppgave 3

$f(x) = x^2 + 4x + 8$

Bruk definisjonen av den deriverte og regn deg fram til et generelt uttrykk for $f'(x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) + 8 - (x^2 + 4x + 8)}{\Delta x}$$
$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 4x + 4\Delta x + 8 - x^2 - 4x - 8}{\Delta x}$$
$$= \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 4\Delta x}{\Delta x}$$
$$= 2x + \Delta x + 4$$

$2x + \Delta x + 4 \to 2x + 4$ når $\Delta x \to 0$

$f'(x) = \underline{\underline{2x+4}}$

Oppgave 4

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{-3x+6}{x-3}$$

Bestem likningene for asymptotene og tegn grafen til f med asymptoter i et koordinatsystem.

Vertikal asymptote:

Nevneren er lik 0 når $x = 3$.

Telleren er ikke 0.

Grenseverdien eksisterer ikke. $f(x) \to \pm\infty$ når $x \to 3$.

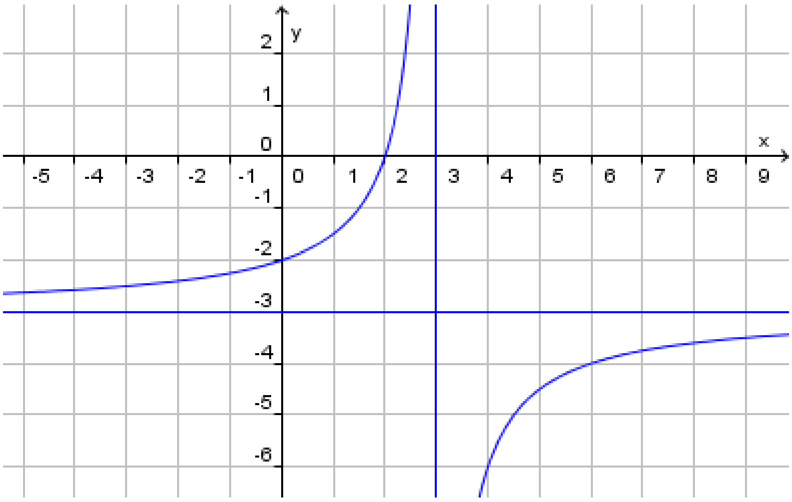
$\underline{\underline{\text{Linjen } x = 3 \text{ er en vertikal asymptote for } f\ .}}$

Horisontal asymptote:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+6}{x-3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{-3x}{x} + \frac{6}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}} = \frac{-3+0}{1-0} = -\frac{3}{1} = -3$$

Når x går mot $\pm$ uendelig, vil grafen til f nærme seg linja $y = -3$.

$\underline{\underline{\text{Linjen } y = -3 \text{ er en horisontal asymptote for } f\ .}}$


y
x
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Del 2

Tid: 80 min
Hjelpemidler: Alle hjelpemidler. Ikke Internett eller andre former for kommunikasjon.

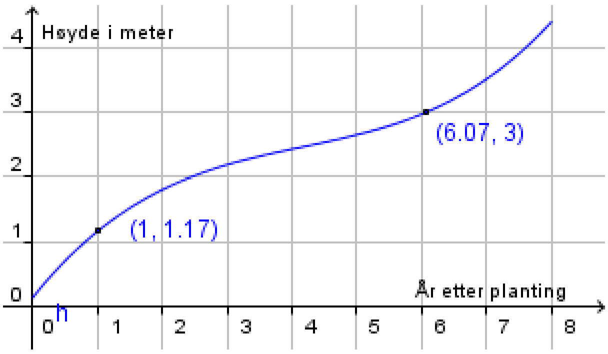
Oppgave 5

Forskere har undersøkt vekstutviklingen til trær i et bestemt skogområde. Det viser seg at høyden til et tre, målt i meter, tilnærmet kan beskrives med en matematisk modell.
I de første 8 årene etter at et tre er plantet ut, gjelder

$$h(x) = 0,02x^3 - 0,25x^2 + 1,25x + 0,15$$

der x er antall år etter utplantingen.

a) Tegn grafen til h i et koordinatsystem og bestem hvor høyt et tre er ett år etter at det er plantet.

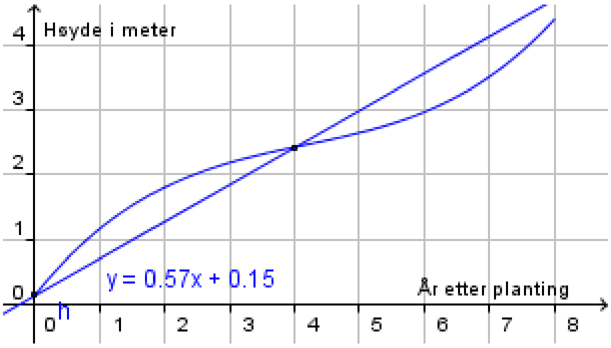


Vi merker av punktet $(1, h(1)) = (1, 1,17)$ på grafen.

<u>Treet er ca. 1,2 meter høyt ett år etter at det er plantet.</u>

b) Et tre er ca. 3 meter høyt.
Hvor lenge er det siden treet ble plantet?
Vi tegner inn linja $y = 3$ i koordinatsystemet og finner skjæringspunktet mellom denne linja og grafen til $h(x)$. Skjæringspunktet har koordinatene $(6,07, 3)$, se grafen.
<u>Det er ca. 6 år siden treet ble plantet.</u>

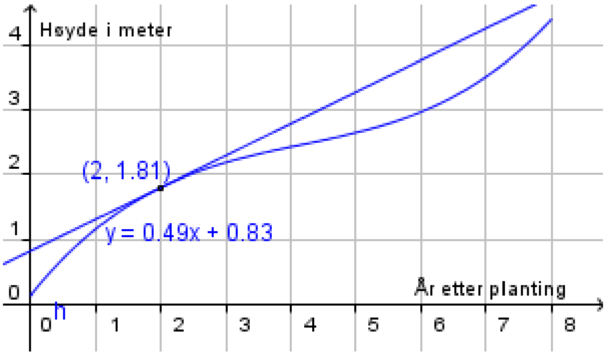
c) Hvor mye vokser et tre i gjennomsnitt per år de fire første årene etter utplantingen?
Vi merker av punktene $(1, h(1))$ og $(4, h(4))$ og trekker ei linje gjennom disse punktene.
Stigningstallet for denne linja gir oss den gjennomsnittlige veksthastigheten de fire første årene.



Treet vokser i gjennomsnitt ca. 0,57 meter per år de fire første årene etter utplantingen.

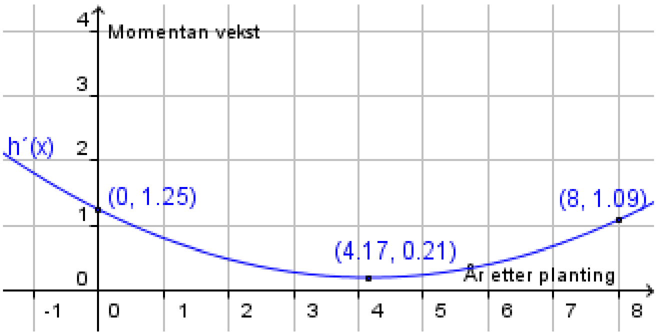
d) Hvor mye vokser et tre per år to år etter utplantingen?

Vi merker av punktet $(2, h(2))$ og tegner en tangent til grafen i dette punktet. Stigningstallet til tangenten gir oss momentan veksthastighet etter to år i meter per år.



Treet vokser ca. 0,49 meter per år to år etter utplantingen.

e) Finn $h'(x)$ og tegn grafen til den deriverte. Forklar hvordan du kan bruke denne grafen til å finne ut når et tre vokser raskest og når det vokser seinest (det vil si når den momentane vekstfarten er størst og når den er minst).



Den deriverte viser hvor raskt treet vokser. (Momentan vekst.)

Treet vokser raskest akkurat når det blir plantet ut, den deriverte har her sin største verdi, se graf.

Treet vokser seinest etter ca. 4 år, siden den deriverte her har den laveste verdien, bunnpunkt på grafen.

Oppgave 6

Siri skal på tur, og undersøker tilbud på leiebil. Hun vil leie bil i én uke, og hun kan velge mellom to tilbud:

A. Leie for én uke 3 500 kroner uavhengig av hvor langt hun kjører.

B. Leie for én uke 4 500 kroner uavhengig av hvor langt hun kjører.

I begge tilfeller må hun betale bensinen selv.

Tilbud A gjelder en gammel bil med forholdsvis høyt bensinforbruk. Vi regner her at bilen i tilbud *A* bruker $0{,}9$ liter/mil.

Tilbud B gjelder en ny bil som har et bensinforbruk på $0{,}5$ liter/mil.

Regn med at bensinprisen er 15 kr/liter.

a) Vis at $A(x) = 1{,}35x + 3500$ gir utgiftene i kroner dersom hun kjører x kilometer i løpet av uka med tilbud A.

Utgifter til bensin per kilometer: $0{,}9 \text{ liter/mil} \cdot 15 \text{ kr/liter} = 13{,}5 \text{ kr/mil} = 1{,}35 \text{ kr/kilometer}$.

Vi får da $\underline{A(x) = 1{,}35x + 3500}$.

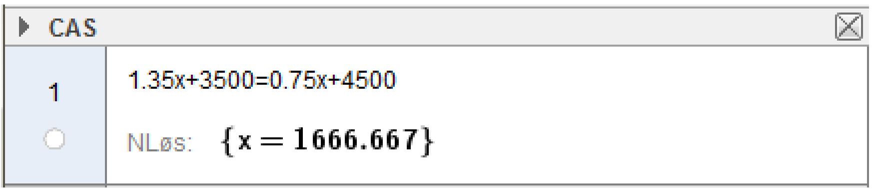
b) Finn et uttrykk $B(x)$ som gir utgiftene i kroner dersom hun kjører x kilometer i løpet av uka med tilbud B.

$B(x) = 15 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 4500$

$\underline{\underline{B(x) = 0{,}75x + 4500}}$

c) Undersøk hvor langt hun må kjøre for at det skal svare seg å bruke tilbud B.

Vi setter $A(x) = B(x)$ og løser likningen med digitalt verktøy.



Hun må kjøre mer enn $\underline{\underline{1667 \text{ kilometer} = 167 \text{ mil}}}$ for at tilbud B skal lønne seg.

Siri har planlagt turen nøye og vet at hun kommer til å kjøre ca. 160 mil. Men hun er usikker på bensinprisen.

d) La nå literprisen på bensin være den variable, x, og bestem to uttrykk, $a(x)$ og $b(x)$ som gir kostnaden i kroner for å leie bil i én uke og kjøre 160 mil med henholdsvis tilbud A og tilbud B.

$a(x) = 160 \cdot 0{,}9 \cdot x + 3500$

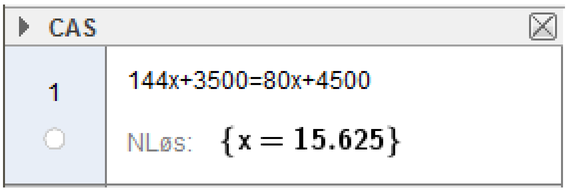
$\underline{\underline{a(x) = 144x + 3500}}$

$a(x) = 160 \cdot 0{,}5 \cdot x + 4500$

$\underline{\underline{a(x) = 80x + 4500}}$

e) Undersøk hva bensinprisen må være for at det skal lønne seg å velge tilbud B.

Vi løser likningen $a(x) = b(x)$.



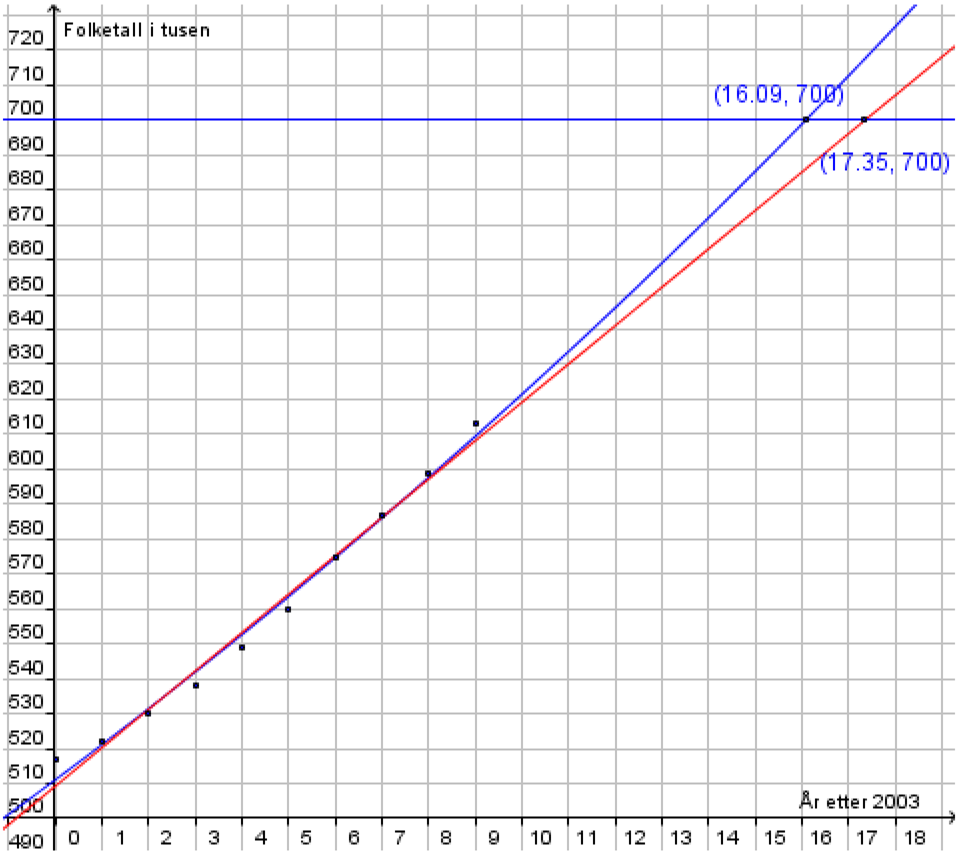
Bensinprisen må være over $\underline{\underline{15{,}63 \text{ kroner/liter}}}$ for at det skal svare seg å velge tilbud B.

Oppgave 7

I 2011 passerte folketallet i Oslo 600 000. Tabellen viser folketallet i Oslo fra 2003 til 2012 i tusen.

År	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Befolkning i tusen	517	522	530	538	549	560	575	587	599	613

a) Bruk digitalt verktøy og plott punktene i et koordinatsystem.



La x være antall år etter 2003.

b) Bruk regresjon og finn en eksponentialfunksjon og en lineær funksjon som passer godt med dataene fra tabellen. Tegn grafene til funksjonene i samme koordinatsystem som punktene fra tabellen.

Bruker eksponentiell regresjon i GeoGebra og får $f(x) = \underline{\underline{511 \cdot 1{,}02^x}}$.

Bruker lineær regresjon i GeoGebra og får $g(x) = \underline{\underline{11x + 510}}$.

c) Når passerer folketallet i Oslo 700 000 ifølge de to modellene?

Vi legger inn linja $y = 700$ i koordinatsystemet og bestemmer skjæringspunktet mellom denne linja og grafen til de to funksjonene fra b). Avlesning gir at folketallet passerer 700 000 i år 2019 etter eksponentialfunksjonen, og i 2020 etter den lineære modellen. Se grafen i a).

d) Hva forteller de to funksjonsuttrykkene om den årlige veksten i folketallet?

Ut fra uttrykket $f(x) = 511 \cdot 1{,}02^x$ ser vi at vekstfaktoren er $1{,}02$. Det svarer til en årlig vekst på $\underline{\underline{2\,\%}}$.

Ut fra uttrykket $g(x) = 11x + 510$ er den årlige veksten $\underline{\underline{11\,000}}$.