S2 eksamen våren 2018 løsningsforslag

DEL 1
Uten hjelpemidler

Tid: 3 timer
Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x)=2x^3-4x+1$

$f'(x)=3\cdot 2x^{3-1}-4=\underline{\underline{6x^2-4}}$

b) $g(x)=\dfrac{x}{e^x}$

Vi bruker kvotientregelen for derivasjon, $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$

$$g'(x)=\frac{(x)'\cdot e^x-x\cdot\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x-x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\underline{\underline{\frac{1-x}{e^x}}}$$

c) $h(x)=\ln\left(x^2+4x\right)$

Vi bruker kjerneregelen på $\ln\left(x^2+4x\right)$. Vi setter $g(u)=\ln(u)$ og $u=x^2+4x$

Det gir $g'(u)\cdot u'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$ der $u'=2x+4$

Dermed er $h'(x)=\dfrac{1}{x^2+4x}\cdot(2x+4)=\underline{\underline{\dfrac{2(x+2)}{x(x+4)}}}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Løs ligningssystemet

1. $5x+y+2z=0$
2. $2x+3y+z=3$
3. $3x+2y-z=-3$

Vi adderer likning 2 og 3

$$2x+3x+3y+2y+z+(-z)=3+(-3)$$
$$5x+5y=0$$
$$x=\frac{-5}{5}y$$
$$x=-y$$

Vi adderer likning 1 med to ganger likning 3

$$5x+6x+y+4y+2z+(-2z)=0+(-6)$$
$$11x+5y=-6$$

Fra tidligere har vi at $x=-y$. Vi setter inn for x og får

$$11(-y)+5y=-6$$
$$-11y+5y=-6$$
$$-6y=-6$$
$$y=1$$

Det gir at $x=-1$

Vi setter så verdiene for x og y inn i likning 3

$$3x+2y-z=-3$$
$$3+(-2)-z=-3$$
$$3-3+2=z$$
$$z=2$$

Likningssystemet har løsningen $x=-1 \wedge y=1 \wedge z=2$

Oppgave 3 (4 poeng)

Et polynom P er gitt ved

$$P(x)=x^3-3x^2-13x+15$$

a) Forklar at $P(x)$ er delelig med $(x-1)$.

Polynomet P er delelig med $(x-1)$ dersom $x=1$ er et nullpunkt for P.

$P(1)=1^3-3\cdot 1^2-13\cdot 1+15=0$

Dette gir dermed at $(x-1)$ er en faktor i P.

b) Løs ulikheten $P(x)>0$.

Vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}(x^3-3x^2-13x+15):(x-1)=x^2-2x-15\\ \underline{-(x^3-x^2)}\\ \quad -2x^2-13x\\ \quad \underline{-(-2x+2x)}\\ \quad\quad -15x+15\\ \quad\quad \underline{-(15x+15)}\\ \quad\quad\quad 0\end{array}$$

Det betyr at $P(x)=(x^2-2x-15)(x-1)$

Vi kan nå faktorisere andregradspolynomet ved hjelp nullpunktmetoden.

$$x^2-2x-15=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm 8}{2}$$

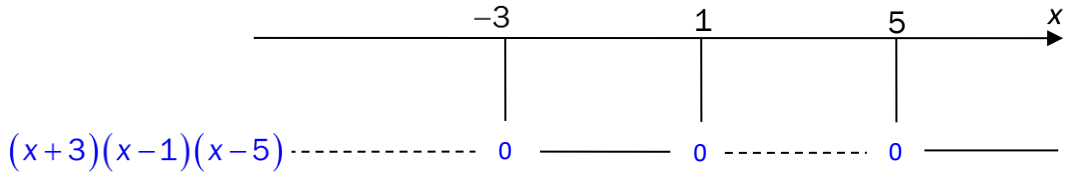
$$x_1=-3 \quad \vee \quad x_2=5$$

Det betyr at $x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$.

Fullstendig faktorisering av tredjegradsuttrykket gir

$$P(x)=x^3-3x^2-13x+15=(x+3)(x-1)(x-5)$$

Vi tegner fortegnsskjema



Vi finner at $P(x)>0$ for $-3<x<1 \quad \vee \quad x>5$

Oppgave 4 (4 poeng)

I en aritmetisk følge er $a_1=2$ og $a_4=14$.

a) Bestem en formel for a_n uttrykt ved n.

Vi finner differansen d

$$a_1+3\cdot d=a_4$$
$$2+3d=14$$
$$3d=12$$
$$d=4$$

En eksplisitt formel for en aritmetisk følge er gitt ved $a_n=a_1+(n-1)d$.

Vi får dermed

$$a_n=2+(n-1)\cdot 4$$
$$a_n=2+4n-4$$
$$a_n=\underline{\underline{4n-2}}$$

b) Regn ut $a_1+a_2+...a_{100}$.

Vi har at summen for en aritmetisk følge er gitt ved $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

Vi får dermed

$$S_n=\frac{n(2+(4n-2))}{2}$$
$$S_n=\frac{n(4n)}{2}$$
$$S_n=2n^2$$

Det betyr at

$$S_{100}=2\cdot 100^2=\underline{\underline{20\ 000}}$$

Oppgave 5 (4 poeng)

a) Forklar at den geometriske rekken $3+\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\ldots$ konvergerer.

Bestem summen av rekken.

En geometrisk rekke konvergerer når kvotienten $-1<k<1$.

$$k=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{3}{4}}{3}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4} \qquad k=\frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Vi har at $k=\frac{1}{4}$. Det betyr at rekken konvergerer da kravet til konvergens er oppfylt.

Summen av en konvergent geometrisk rekke er gitt ved $S=\frac{a_1}{1-k}$

Vi får $S=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=\underline{\underline{4}}$

b) Forklar at desimaltallet $0,242424\ldots$ kan skrives som den uendelige rekken

$$\frac{24}{100}+\frac{24}{100^2}+\frac{24}{100^3}+\ldots$$

Bruk dette til å skrive tallet $0,242424\ldots$ som en brøk.

Desimaltallet kan skrives som

$$\begin{aligned}0,242424\ldots &= 0,24+0,0024+0,000024+\ldots\\ &=\frac{24}{100}+\frac{24}{10000}+\frac{24}{1000000}+\ldots\\ &=\frac{24}{100^1}+\frac{24}{100^2}+\frac{24}{100^3}+\ldots\end{aligned}$$

Tallet kan altså skrives som en uendelig konvergent geometrisk rekke med $a_1=\frac{24}{100}$

og $k=\frac{1}{100}$.

Vi finner summen av denne rekken slik vi gjorde i oppgave a)

$$S=\frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{24}{100-1}=\frac{24}{99}=\frac{8}{33}$$

Det betyr at tallet $0,242424\ldots=\underline{\underline{\frac{8}{33}}}$

Oppgave 6 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{6}{1+e^{-x}}$$

a) Vis at grafen til f alltid er stigende.

Vi deriverer funksjonen

$$f'(x)=\frac{0-\left(-1\cdot e^{-x}\right)\cdot 6}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{6e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{6}{e^{x}\left(1+e^{-x}\right)^2}$$

Vi ser at telleren alltid er positiv. Videre vet vi at $e^{x}>0$ og at $\left(1+e^{-x}\right)^2>0$

Det betyr at $f'(x)>0$ for alle x. Som igjen gir at f er stigende for alle verdier av x.

b) Begrunn at $0<f(x)<6$ for alle verdier av x.

Undersøker grenseverdien når x blir veldig stor og når x blir veldig liten.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{1+e^{-x}}=\frac{6}{1+0}=6$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{1+e^{-x}}=\frac{6}{1+\infty}=0$$

Grenseverdiene viser at $f(x)$ vil ha funksjonsverdier mellom 0 og 6.

c) Vis ved regning at grafen til f har vendepunkt i $(0, 3)$.

Grafen til f har vendepunkt der $f''(x)=0$

Fra a) har vi $f'(x)=\dfrac{6}{e^x\left(1+e^{-x}\right)^2}$

Finner først den deriverte av nevneren $e^x\left(1+e^{-x}\right)^2$

$$\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)^2\right)'=e^x\left(1+e^x\right)^2+e^x\left(-2e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)\right)$$
$$=e^x\left(1+e^{-x}\right)\left(\left(-2e^{-x}+1+e^{-x}\right)\right)=e^x\left(1+e^{-x}\right)\left(-e^{-x}+1\right)$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot e^x\left(1+e^{-x}\right)^2-6\cdot e^x\left(1+e^{-x}\right)\left(-e^{-x}+1\right)}{\left(\left(1+e^{-x}\right)^2\right)^2}$$
$$f''(x)=\frac{-6\cdot e^x\left(1+e^{-x}\right)\left(-e^{-x}+1\right)}{\left(\left(1+e^{-x}\right)^2\right)^2}$$
$$f''(x)=\frac{6\cdot e^x\left(e^{-x}-1\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^3}$$

Vi løser likningen $f''(x)=0$

$$\frac{6\cdot e^x\left(e^{-x}-1\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^3}=0$$
$$6e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)=0$$
$$e^{-x}-1=0$$
$$e^{-x}=1$$
$$x=0$$

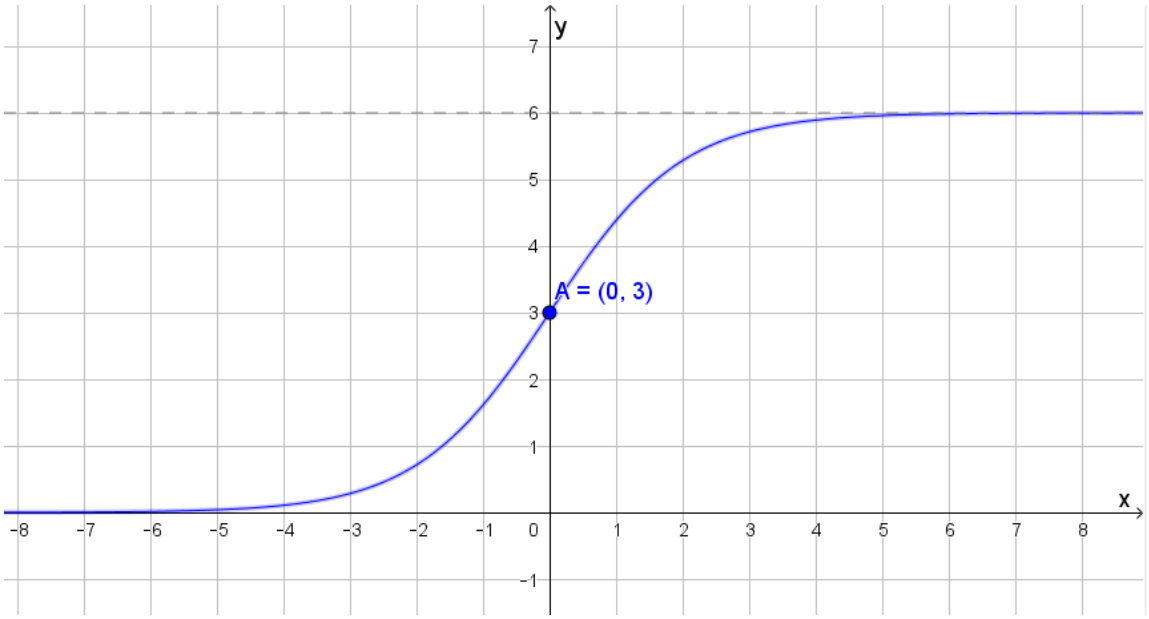
Vi sjekker om dette er et vendepunkt. Vi har at $f''(-1)=e^{-1}-1<0$ og $f''(1)=e^1-1>0$. Det betyr at $e^{-x}-1$ skifter fortegn og vi har dermed et vendepunkt for $x=0$. Vi finner $f(0)$

$$f(0)=\frac{6}{1+e^0}=\frac{6}{2}=3$$

Grafen til f har et vendepunkt i $\underline{\underline{(0, 3)}}$

d) Lag en skisse av grafen til f.

Vi markerer vendepunktet $(0, 3)$ og linjene $y = 6$ og $y = 0$. Vi skisserer en stigende graf i dette området.



Oppgave 7 (4 poeng)

I en eske er det fire blå og seks røde kuler. Tenk deg at du skal trekke tilfeldig én kule og legge den tilbake i esken. Dette skal du gjøre ti ganger.

Vi lar X være antallet røde kuler som du trekker.

a) Forklar at X er binomisk fordelt.

Hendelsen er binomisk fordelt fordi

- vi har $n = 10$ ulike delforsøk hvor sannsynligheten for å få en rød kule er den samme i hvert forsøk siden kulen legges tilbake

  $$P(\text{rød kule}) = \frac{\text{gunstige}}{\text{totalt}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

- hvert delforsøk er uavhengig av hverandre
- det er to mulige utfall i hvert delforsøk, rød eller blå kule

b) Bestem $E(X)$ og $Var(X)$.

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot \frac{3}{5} = \underline{\underline{6}}$$

$$Var(X) = n \cdot p(1-p) = 10 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 6 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) = \underline{\underline{\frac{12}{5} = 0{,}24}}$$

Oppgave 8 (4 poeng)

Baker Nilsen lager rugbrød. Vi går ut fra at vekten av rugbrødene er normalfordelt med $\mu = 1{,}00$ kg og $\sigma = 0{,}05$ kg.

a) Bestem sannsynligheten for at et tilfeldig valgt rugbrød veier mellom 0,90 kg og 1,10 kg.

$$
\begin{aligned}
&P(0{,}90 < X < 1{,}10) \\
&= P\left(\frac{0{,}90 - 1{,}00}{0{,}05} < Z < \frac{1{,}10 - 1{,}00}{0{,}05}\right) \\
&= P(-2 < Z < 2) \\
&= P(Z < 2) - P(Z < -2) \\
&= 0{,}9772 - 0{,}0228 \\
&= \underline{\underline{0{,}9544}}
\end{aligned}
$$

Rugbrødene sendes til butikken på paller med 100 rugbrød på hver pall.

b) Bestem sannsynligheten for at vekten av rugbrødene på en tilfeldig pall er mellom 99,5 kg og 100,5 kg.

Vekten til brødene er normalfordelt. Dermed vil summen av vekten til 100 rugbrød S_{100} også være normalfordelt. Vi finner forventningsverdi μ_s og standardavvik σ_s til en pall med rugbrød.

$$
\begin{aligned}
&\mu_s = n \cdot \mu = 100 \text{ kg} \cdot 1{,}00 = 100 \text{ kg} \\
&\sigma_s = \sqrt{n} \cdot \sigma = \sqrt{100} \cdot 0{,}05 \text{ kg} = 10 \cdot 0{,}05 \text{ kg} = 0{,}5 \text{ kg} \\
&P(99{,}5 < S_{100} < 100{,}5) \\
&= P\left(\frac{99{,}5 - 100}{0{,}5} < Z < \frac{100{,}5 - 100}{0{,}5}\right) \\
&= P(-1 < Z < 1) \\
&= P(Z < 1) - P(Z < -1) \\
&= 0{,}8413 - 0{,}1587 \\
&= \underline{\underline{0{,}6826}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 9 (2 poeng)

Om en funksjon f vet vi at grafen har toppunkt i $(2, 3)$ og bunnpunkt i $(3, -4)$.

En annen funksjon g er gitt ved

$$g(x) = -5 \cdot f(x) + 3$$

Bestem topp- og bunnpunkter på grafen til g.

Opplysningene ovenfor gir følgende opplysninger om grafen til f

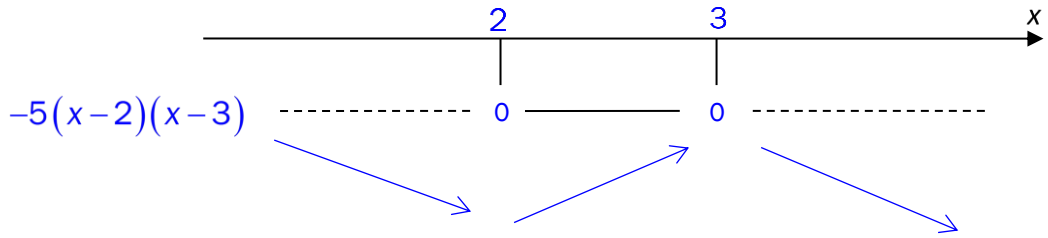
$$f'(2) = 0 \quad , \quad f'(3) = 0 \quad , \quad f(2) = 3 \quad , \quad f(3) = -4$$

Vi setter $g'(x) = 0$ for å finne ekstremalpunkter

$$g'(x) = -5 \cdot f'(x)$$

$$g'(x) = -5(x-2)(x-3)$$

Vi tegner fortegnslinje for g



Fra fortegnsskjemaet ser vi at grafen til g har et bunnpunkt for $x = 2$ og et toppunkt for $x = 3$.

$$g(2) = -5 \cdot f(2) + 3 = -5 \cdot 3 + 3 = -12$$

$$g(3) = -5 \cdot f(3) + 3 = -5 \cdot (-4) + 3 = 23$$

Grafen til g har bunnpunkt i $(2, -12)$ og et toppunkt i $(3, 23)$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (8 poeng)

En bedrift produserer x enheter av en vare per dag. Den daglige kostnaden (i kroner) er gitt i tabellen nedenfor, for noen utvalgte verdier av x.

x	0	10	20	30	40	50
Daglige kostnader (i kroner)	500	751	898	1249	2108	3752

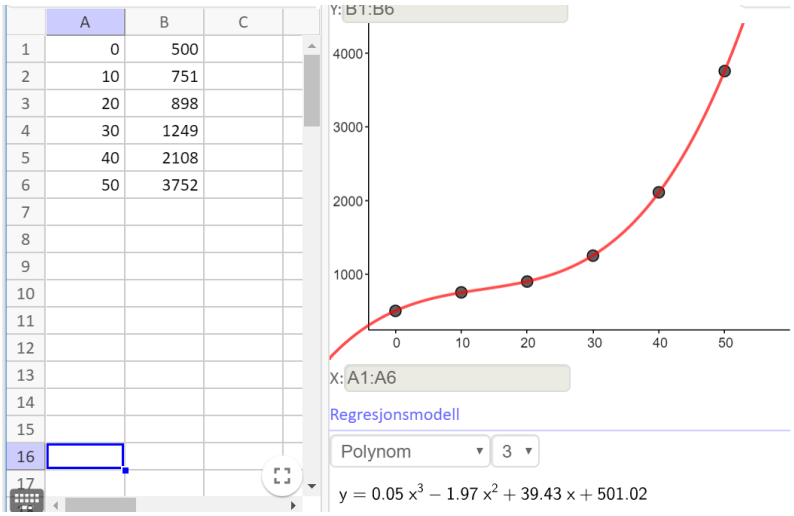
Vi regner med at bedriften får solgt hele produksjonsmengden for 80 kroner per enhet.

a) Vis at funksjonen O gitt ved

$$O(x) = -0{,}05x^3 + 2{,}0x^2 + 41x - 501$$

er en god modell for det daglige overskuddet til bedriften ved produksjon av x enheter.

Vi legger verdiene fra tabellen inn i regnearket i GeoGebra. Vi bruker så verktøyet regresjonsanalyse og velger polynom av 3. grad. Vi får funksjonen $y = 0{,}05x^3 - 1{,}97x^2 - 39{,}43x + 501{,}02$, se nedenfor.



Vi ser at denne funksjonen er tilnærmet lik kostnadsfunksjonen $K(x) = 0{,}05x^3 - 2{,}0x^2 + 39x + 501$.

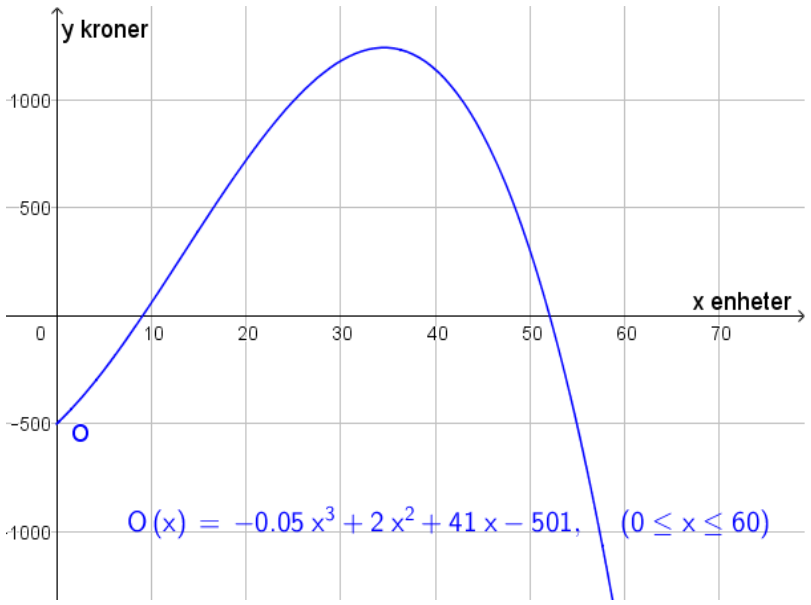
Vi har at inntektene er gitt ved inntektsfunksjonen $I(x) = 80x$.

Overskuddsfunksjonen O er da gitt ved $O(x)=I(x)-K(x)$

$$O(x)=80x-\left(0.05x^3-2{,}0x^2+39x+501\right)=-0{,}05x^3+2{,}0x^2+41x-501$$

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til overskuddsfunksjonen O.

Vi tegner grafen til O i GeoGebra.



Hvilken daglig produksjonsmengde gir at grensekostnaden er lik grenseinntekten? Hva forteller dette oss?

Bruker CAS i GeoGebra og løser likningen

1 $I(x) := 80x$

→ $I(x) := 80x$

2 $K(x) := 0.05x^3 - 2x^2 + 39x + 501$

≈ $K(x) := 0.05x^3 - 2x^2 + 39x + 501$

3 $K'(x) = I'(x)$

NLøs: $\{x = -7.91, x = 34.57\}$

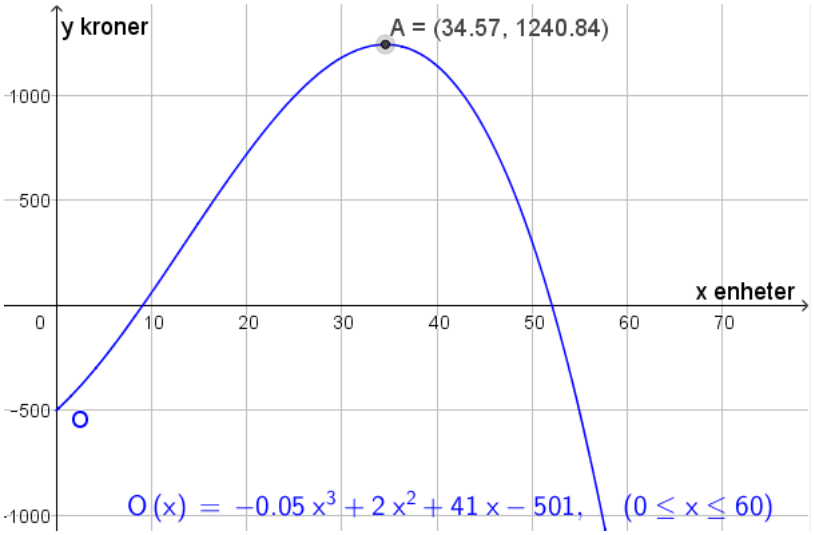
Når grenseinntekten er lik grensekostnaden, vil vi finne størst overskudd.
Vi antar at bedriften antagelig må produsere et helt antall enheter. Da må vi regne ut om overskuddet er størst ved 34 eller 35 produserte enheter.

4	O(x) := I − K
	≈ $O(x) := -0.05\,x^3 + 2\,x^2 + 41\,x - 501$
5	O(34)
	≈ 1239.8
6	O(35)
	≈ 1240.25

En produksjonsmengde på 35 enheter gir det største overskuddet.

Alternativ grafisk løsning:

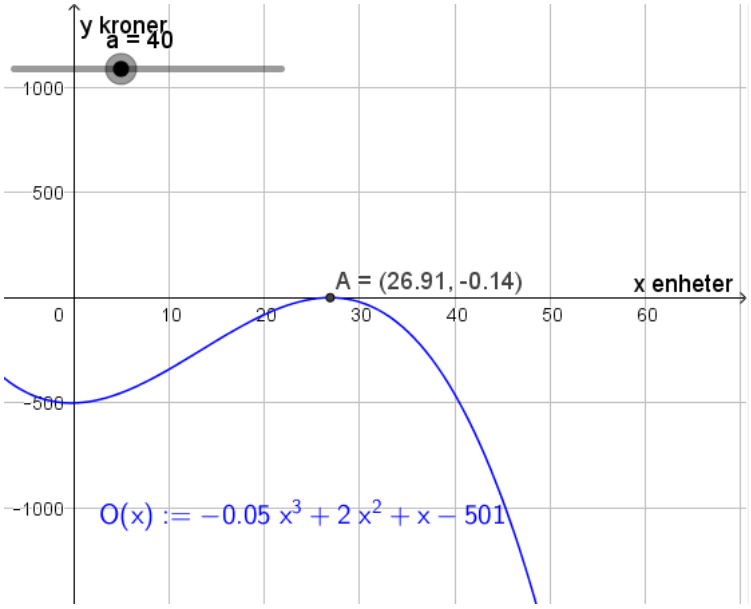
Vi bruker kommandoen Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>) i GeoGebra for å finne toppunktet til overskuddsfunksjonen.



Det maksimale overskuddet oppnås i punktet $A = (34{,}57,\ 1240{,}84)$, som vil si ved produksjon av 34,57 enheter.

På grunn av økt konkurranse må bedriften sette ned prisen per enhet.

c) Hva er den laveste prisen de kan ta per enhet og likevel unngå å gå med underskudd?
Hvor mange enheter må de i så fall produsere?
I dette tilfellet skal vi finne laveste prisen a bedriften kan ta uten å gå med underskudd. Inntektsfunksjonen I er dermed gitt ved $I(x)=a\cdot x$. Vi legger inn funksjonen i GeoGebra med a som glider. Vi lar a variere til overskuddsfunksjonen har et toppunkt for $y=0$.



Vi ser at ved en pris på 40 kr per enhet, vil overskuddet være omtrent lik 0 kr.
Overskuddsfunksjonen får et toppunkt i $A=(26{,}91,\ -0{,}14)$.
Bedriften må da produsere 27 enheter.

Alternativ løsning i CAS

Vi definerer en ny inntektsfunksjon i med variabelen y for pris per enhet, og finner en ny overskuddsfunksjon o.

2	i(x):=y*x → $i(x) := x\,y$
3	o(x)=i(x)-K(x) → $o(x) = -\frac{1}{20}x^3 + 2x^2 + x\,y - 39x - 501$

Vi deriverer overskuddsfunksjonen og løser likningene i CAS for å finne hvilken y-verdi som gir et overskudd lik null.

4	o(x) = (-1) / 20 x³ + 2x² + x y - 39x - 501 Derivert: $o'(x) = -\frac{3}{20}x^2 + 4x + y - 39$
5	i(x) - K(x) = 0 → $-\frac{1}{20}x^3 + 2x^2 + x\,y - 39x - 501 = 0$
6	(-3) / 20 x² + 4x + y - 39=0 → $-\frac{3}{20}x^2 + 4x + y - 39 = 0$
7	{$5, $6} Løs: $\{\{x = 26.92, y = 40.01\}\}$

Overskuddet er null når prisen per enhet er 40 kroner. De må da selge 27 enheter.

Oppgave 2 (8 poeng)

Eirik vil spare penger fram til han blir pensjonist. Han ønsker å spare 40 000 kroner i året i 15 år fremover. Han planlegger å gjøre sitt første innskudd 1. juli 2018.

Eirik forventer at den årlige avkastningen vil være 5 % i hele perioden.

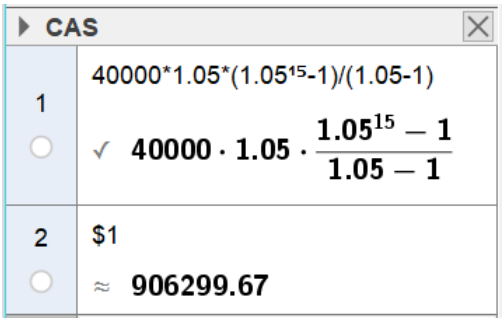
a) Sett opp en geometrisk rekke som viser hvor stort beløp Eirik har på kontoen ett år etter siste innbetaling. Bruk CAS til å vise at summen av denne rekken er 906 299,67 kroner.

Summen av sparebeløp og renter ett år etter siste innbetaling kan settes opp som en geometrisk rekke med 15 ledd hvor $a_1 = 40000 \cdot 1{,}05$ og $k = 1{,}05$

$$S_{15} = 40000 \cdot 1{,}05 + 40000 \cdot 1{,}05^2 + \ldots + 40000 \cdot 1{,}05^{15}$$

$$S_{15} = 40000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{15} - 1}{1{,}05 - 1}$$

Vi bruk CAS og finner



Ett år etter siste innbetaling kan Eirik forvente å ha 906 299,67 kroner på kontoen.

Eirik vurderer tre alternative måter å disponere pengene på.

I. Det oppsparte beløpet tas ut i 15 like store beløp 1. juli hvert år fra og med 2033 og til og med 2047.

II. Det oppsparte beløpet brukes til å opprette et fond. Fondet skal den 1. juli hvert år betale et fast beløp til et godt formål. Første utbetaling er 2033. Disse utbetalingene skal pågå i all framtid.

III. Eirik tar ut 30 000 kroner i 2033. Deretter øker han det årlige uttaksbeløpet med 10 % hvert år. Alle uttakene skjer den 1. juli.

I resten av oppgaven antar vi at den årlige avkastningene vil være 5 % per år i all framtid.

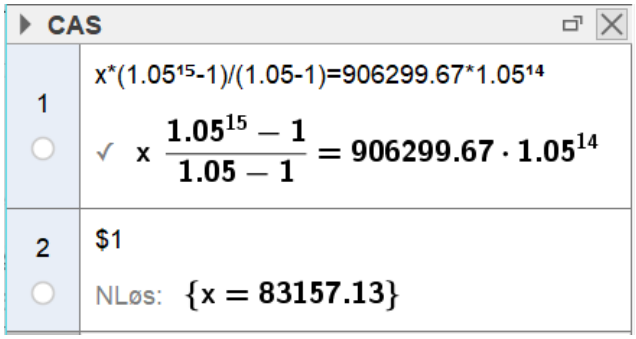
b) Hvor stor blir den årlige utbetalingen med alternativ I?

Vi setter opp en geometrisk rekke hvor $a_1 = x$ og antall uttak er $n = 15$.

Fra og med 2033 til siste uttak i 2047 er det gått 14 år.

Samlet verdi etter 14 år er dermed gitt ved $906299,67 \cdot 1,05^{14}$

Vi løser likningen i CAS



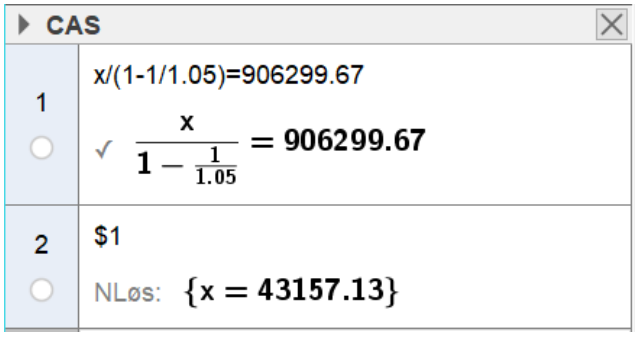
Den årlige utbetalingen vil være 83157,13 kroner.

c) Hvor stor blir den årlige utbetalingen med alternativ II?

Vi setter opp en uendelig geometrisk rekke som konvergerer mot en sum på 906299,67 kroner hvor $a_1 = x$ og $k = \frac{1}{1,05}$.

$$S = \sum_{n \to \infty} x \cdot \left(\frac{1}{1,05}\right)^{n-1} = \frac{x}{1 - \frac{1}{1,05}}$$

Vi løser likningen i CAS i GeoGebra



Den årlige utbetalingen vil med alternativ II være 43157,13 kroner.

d) Når er kontoen til Eirik tom dersom han følger planen i alternativ III?

Vi setter opp en rekke for uttaket hvor summen skal bli lik nåverdi der

$a_1 = 30000$ og $k = \frac{1}{1,05} \cdot 1,1$ og x er antall år fra og med 2033

$$30000 + 30000 \cdot \frac{1,1}{1,05} + ... + 30000 \cdot \left(\frac{1,1}{1,05}\right)^{x-1} = 906299,67$$

Vi løser likningen i CAS i GeoGebra

CAS

1	30000*((1.1/1.05)^x-1)/(1.1/1.05-1)=906299.67 ✓ $30000 \cdot \frac{\left(\frac{1.1}{1.05}\right)^x - 1}{\frac{1.1}{1.05} - 1} = 906299.67$
2	$1 NLøs: $\{x = 19.16\}$

Eirik kan ta ut uttak som er 10 % mer enn året før 19 ganger, altså frem til og med 1. juli 2051. Det vil da være et beløp igjen på kontoen, men mindre enn beløpet han tok ut 1. juli 2051.
Kontoen blir derfor tom 1. juli 2052.

Vi kan finne ut hvor mye penger det vil være igjen på kontoen ved å bruke CAS . Vi finner først beløpet først i nåverdi, og beregner deretter renter for å finne verdien i uttaksåret, altså 1. juli 2052.

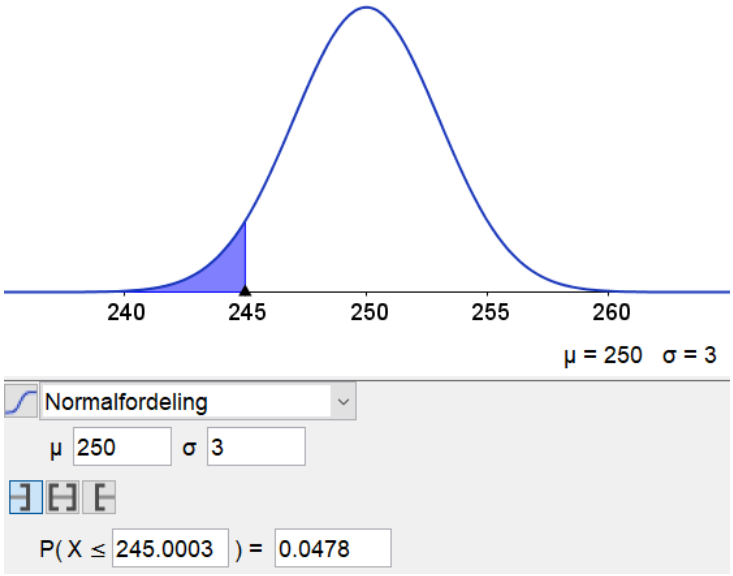
1	30000((1.1/1.05)^19-1)/(1.1/1.05-1) ✓ $30000 \cdot \frac{\left(\frac{1.1}{1.05}\right)^{19} - 1}{\frac{1.1}{1.05} - 1}$
2	$1 ≈ **894771.92**
3	906299.67-894771.92 ≈ **11527.75**
4	11527.75*1.05^18 ≈ **27742.9**

Etter det siste uttaket (det 19.) 1. juli 2051 vil Erik kunne ta ut 27742,90 kroner 1. juli 2052.

Oppgave 3 (8 poeng)

En bedrift produserer en type medisin som selges på flasker. De antar at vekten X av flaskene er normalfordelt med forventningsverdi 250,0 g og standardavvik 3,0 g. Bedriften sier at en flaske veier for lite når den veier mindre enn 245,0 g.

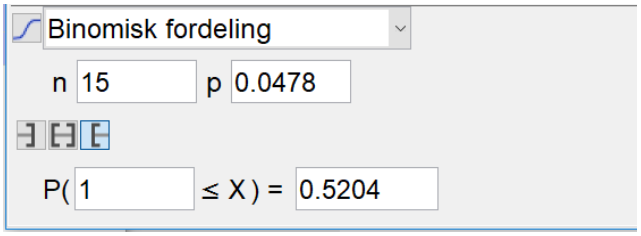
a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig flaske veier for lite.
Vi bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra



Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt flaske veier for lite er 4,78 %.

Flaskene blir pakket i esker. Hver eske inneholder 15 flasker. La Y være antall flasker som veier for lite, i en tilfeldig valgt eske. Da er Y binomisk fordelt.

b) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt eske skal inneholde én eller flere flasker som veier for lite.
Vi bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra med binomisk fordeling med $n = 15$ og $p = 0{,}0478$.

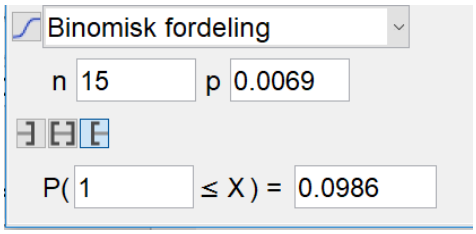


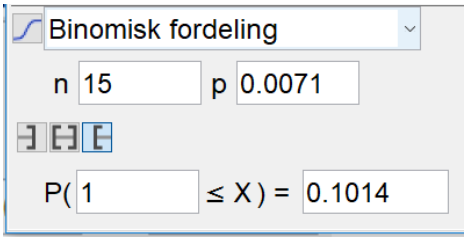
Vi finner at det er 52,0 % sannsynlighet for at en eske inneholder én eller flere flasker som veier for lite.

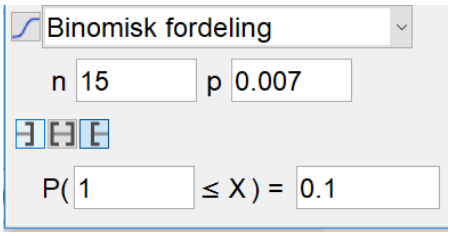
Bedriften har som målsetting at maksimalt 10 % av eskene skal ha flasker som veier for lite. For å nå dette målet må de justere forventningsverdien til X. Vi antar at standardavviket forblir uforandret ved justeringen.

c) Grunngi at sannsynligheten for at en flaske veier for lite, må være høyst 0,70 % dersom de skal kunne nå målsetningen.

Vi bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra og undersøker for ulike verdier av p. Ved litt prøving og feiling finner vi at sannsynligheten for at en flaske veier for lite må være høyst 0,70 % $=0{,}007$ for at det skal være 10 % sannsynlighet for at en eske inneholder én eller flere flasker som veier for lite. Når $p > 0{,}007$, blir sannsynligheten mer enn 10 %.

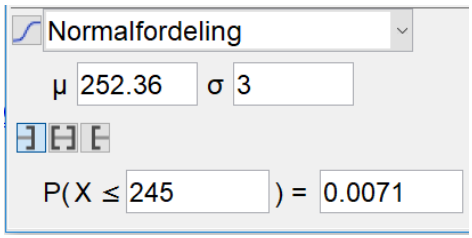


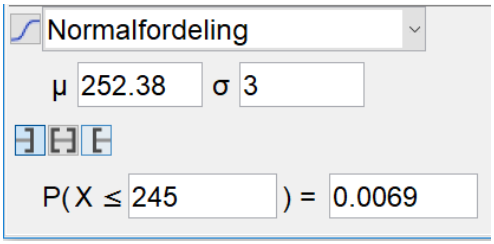


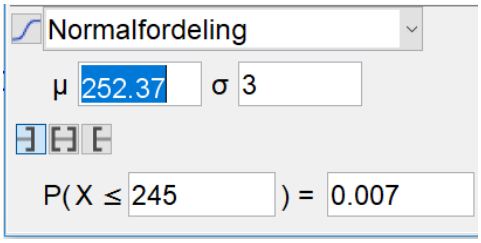


d) Hva må forventningsverdien til X være for at kravet i oppgave c) skal bli oppfylt?

Vi prøver oss frem i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Vi finner at ved en forventningsverdi på 252,37 g blir sannsynligheten 0,70 %.





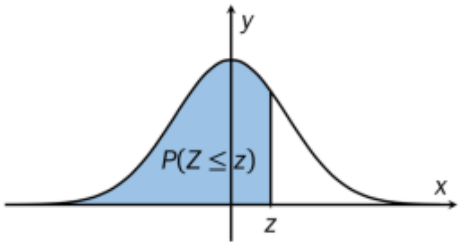


For at sannsynligheten høyst skal være 0,70 % må forventningsverdien være 252,37 gram.

Vedlegg 1

Standard normalfordeling

Tabellen viser $P(Z \leq z)$ for $-3{,}09 \leq z \leq 3{,}09$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet