R1 eksamen våren 2018 løsningsforslag

DEL 1
Uten hjelpemidler

Tid: 3 timer
Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x)=x^4-x+2$

$f'(x)=\underline{\underline{4x^3-1}}$

b) $g(x)=x^3\cdot\ln(x)$

Vi bruker produktregelen for derivasjon, $\left(u(x)\cdot v(x)\right)'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Det gir $g'(x)=3x^2\cdot\ln(x)+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\cdot\ln(x)+x^2=\underline{\underline{x^2\left(3\ln(x)+1\right)}}$

c) $h(x)=e^{2x^2+x}$

Vi bruker kjerneregelen på e^{2x^2+x}. Vi setter $g(u)=e^u$ og $u=2x^2+x$

Det gir $g'(u)\cdot u'=e^u\cdot u'$ der $u'=4x+1$

Dermed er $h'(x)=\underline{\underline{e^{2x^2+x}\cdot(4x+1)}}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{x-3}-\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{1\cdot(x-3)}{2(x-1)(x-3)}+\frac{2\cdot 2(x-1)}{2\cdot(x-3)(x-1)}-\frac{2\cdot(x-2)}{2\cdot(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{x-3+4x-4-2x+4}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{3x-3}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{3(x-1)}{2(x-1)(x-3)}$$

$$=\frac{3}{2(x-3)}$$

$$=\underline{\underline{\frac{3}{2x-6}}}$$

b) $2\ln\left(x\cdot y^3\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)$

$$=2\ln x+2\ln y^3-\frac{1}{2}\left(\ln x^4-\ln y^2\right)$$

$$=2\ln x+3\cdot 2\ln y-\frac{1}{2}(4\ln x-2\ln y)$$

$$=2\ln x+6\ln y-2\ln x+\ln y$$

$$=\underline{\underline{7\ln y}}$$

Oppgave 3 (5 poeng)

Punktene $A(-2,-1)$, $B(-1,-3)$, $C(3,-1)$ og $D(t, t^2+2)$ er gitt, der $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = [-1-(-2), -3-(-1)] = [-1+2, -3+1] = \underline{\underline{[1, -2]}}$$

$$\overrightarrow{BC} = [3-(-1), -1-(-3)] = [3+1, -1+3] = \underline{\underline{[4, 2]}}$$

b) Bruk vektorregning til å vise at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [1, -2] \cdot [4, 2] = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 = 4 - 4 = \underline{0}$$

Skalarproduktet blir 0 og begge vektorene har lengde.

Definisjonen til skalarproduktet gir da at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

c) Bestem t slik at $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$.

Vi har at $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ når $\overrightarrow{CD} = s \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{CD} = [t-3, (t^2+2)-(-1)] = \underline{\underline{[t-3, t^2+3]}}$$

$$\overrightarrow{CD} = s \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[t-3, t^2+3] = s \cdot [1, -2]$$

$$t-3 = s \ \wedge \ t^2+3 = -2s$$

$$s = t-3 \ \wedge \ t^2+3 = -2(t-3)$$

$$s = t-3 \ \wedge \ t^2+2t-3 = 0 \quad *$$

$$s = t-3 \ \wedge \ (t+3)(t-1) = 0$$

$$s = t-3 \ \wedge \ t = -3 \ \vee \ t = 1$$

Vi finner $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ når $t = -3 \ \vee \ t = 1$

*Likningen kan løses med *abc*-formelen dersom det ikke sees direkte ut fra uttrykket.

$$t^2+2t-3 = 0$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$t = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$t = -3 \ \vee \ t = 1$$

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3+k\cdot x+12$$

a) Bestem k slik at divisjonen $f(x):(x-1)$ går opp.

Dersom divisjonen $f(x):(x-1)$ skal gå opp må $f(1)=0$

$$f(1)=0$$
$$1^3+k\cdot 1+12=0$$
$$k=-13$$

Vi finner at $f(x)$ er delelig med $(x-1)$ hvis og bare hvis $k=-13$.

b) Sett inn verdien for k fra oppgave a), og bruk blant annet polynomdivisjon til å skrive $f(x)$ som et produkt av lineære faktorer.

$$x^3-13x+12:(x-1)=x^2+x-12$$
$$\underline{-(x^3-x^2)}$$
$$x^2-13x+12$$
$$\underline{-(x^2-x)}$$
$$-12x+12$$
$$\underline{-(12x+12)}$$
$$0$$

Det betyr at $f(x)=(x^2+x-12)(x-1)$

Vi kan nå faktorisere andregradspolynomet ved hjelp nullpunktmetoden.

$$x^2+x-12=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{-1\pm 7}{2}$$
$$x_1=-4 \quad \vee \quad x_2=3$$

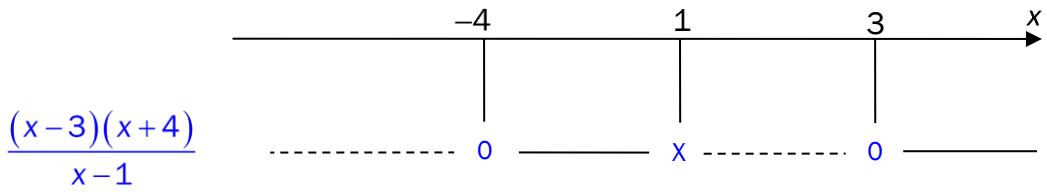
Det betyr at $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$.

Fullstendig faktorisering av tredjegradsuttrykket gir $f(x)=\underline{\underline{(x-3)(x-1)(x+4)}}$

c) Løs ulikheten

$$\frac{x^2+x-12}{x-1} \geq 0$$
$$\frac{(x-3)(x+4)}{x-1} \geq 0$$

Vi tegner fortegnsskjema



Vi finner at $\frac{x^2+x-12}{x-1} \geq 0$ for $-4 \leq x < 1 \quad \vee \quad x \geq 3$

Oppgave 5 (4 poeng)

En butikk kjøper samme type ladere fra to leverandører. Av disse kommer

- 40 % fra leverandør A
- 60 % fra leverandør B

Det viser seg at

- 3 % av laderne fra A er defekte
- 2% av laderne fra B er defekte

Vi tenker oss at vi velger ut en lader tilfeldig.

a) Bestem sannsynligheten for at laderen kommer fra leverandør A og er defekt.
Vi ser av krysstabellen nedenfor at sannsynlighet for denne situasjonen er 1,2 %.

b) Bestem sannsynligheten for at en lader som er defekt, kommer fra leverandør A.
Vi ser av krysstabellen nedenfor at sannsynlighet for denne situasjonen er 50 %
$\left(\frac{1,2}{2,4} = 0,50\right)$.
Krysstabell

	Lader A	Lader B	Sum
Defekt	1, 2 % $(0,40 \cdot 0,03 = 0,012)$	1, 2 % $(0,60 \cdot 0,02 = 0,012)$	2, 4 %
Ikke defekt	38,8 %	58, 8%	97,6 %
Sum	40 %	60 %	100 %

Oppgave 6 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=e^{2x}-4e^{x}+3$$

I denne oppgaven kan du få bruk for følgende tilnærmingsverdier:

$\ln 2 \approx 0{,}69$ og $\ln 3 \approx 1{,}10$

a) Bestem nullpunktene til f.

$$f(x)=0$$

$$\left(e^{x}\right)^{2}-4e^{x}+3=0$$

$$e^{x}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^{2}-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$$

$$e^{x}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}$$

$$e^{x}=\frac{4\pm 2}{2}$$

$$e^{x}=1 \quad \vee \quad e^{x}=3$$

$$x=\ln 1 \quad \vee \quad x=\ln 3$$

$$x=0 \quad \vee \quad x=\ln 3\approx 1{,}10$$

Nullpunktene til f er 0 og 1,10

b) Bestem eventuelle toppunkt og bunnpunkt på grafen til f.

Vi bestemmer eventuelle toppunkt og bunnpunkt ved å sette $f'(x)=0$

$$f'(x)=2e^{2x}-4e^{x}$$

$$2e^{2x}-4e^{x}=0$$

$$2e^{x}\left(e^{x}-2\right)=0$$

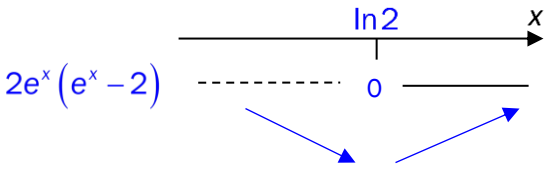
$$e^{x}-2=0$$

$$\ln e^{x}=\ln 2$$

$$x\ln e=\ln 2$$

$$x=\ln 2$$

Vi tegner et fortegnsskjema. ($e^{x}>0$ for alle x)



$$f(\ln 2)=e^{2\ln 2}-4e^{\ln 2}+3=2e^{\ln 2}-4\cdot 2+3=4-8+3=-1$$

Vi finner at grafen til f har et bunnpunkt i $(\ln 2,\, f(\ln 2))=(\ln 2,\,-1)\approx(0{,}69\,,\,-1)$

c) Bestem eventuelle vendepunkt på grafen til f.

Vi bestemmer eventuelle vendepunkt ved å sette $f''(x)=0$

$f''(x)=4e^{2x}-4e^{x}$

$4e^{2x}-4e^{x}=0$

$4e^{x}\left(e^{x}-1\right)=0$

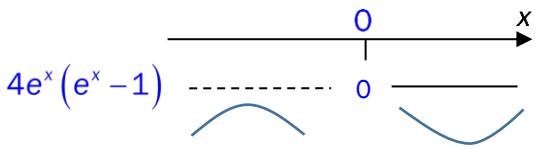
$e^{x}-1=0$

$\ln e^{x}=\ln 1$

$x\ln e=0$

$x=0$

Vi tegner et fortegnsskjema. ($e^{x}>0$ for alle x)

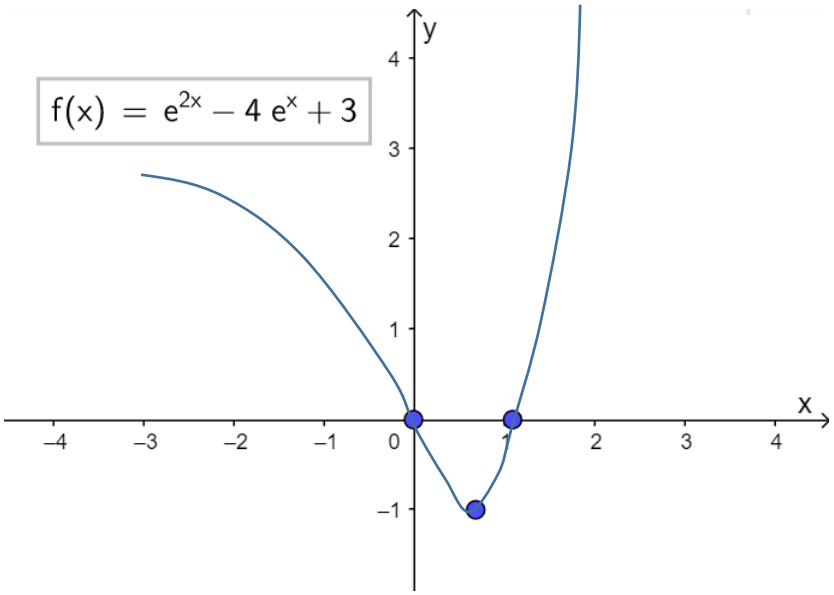


$f(\ln 1)=f(0)=e^{2\cdot 0}-4e^{0}+3=1-4+3=0$

Vi finner at grafen til f har et vendepunkt i $(0,\, f(0))=(0,\,0)$

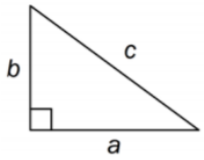
d) Lag en skisse av grafen til f.

Vi skisserer grafen ved å bruke punktene vi har funnet tidligere i oppgaven.

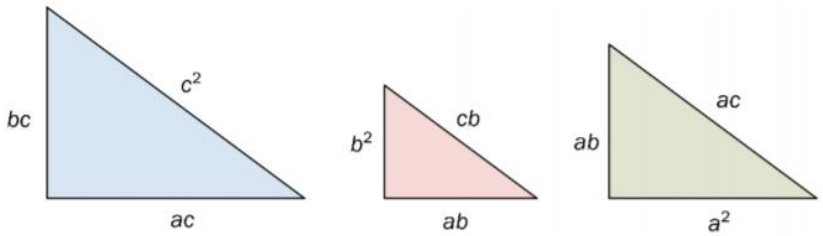


Oppgave 7 (5 poeng)

En rettvinklet trekant har sidene a, b og c, slik figuren nedenfor viser.



Vi kan lage tre nye trekanter med utgangspunkt i denne trekanten. Dette gjør vi ved å multiplisere hver av sidene med henholdsvis c, b og a. Se figurene nedenfor.

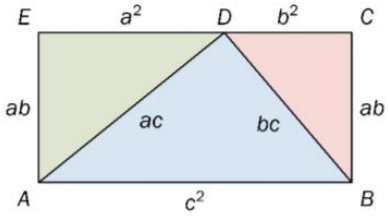


a) Begrunn at de tre trekantene er formlike.

I den blå trekanten blir hver av sidene multiplisert med konstanten c. I den rosa trekanten blir hver av sidene multiplisert med konstanten b, og i den grønne trekanten blir hver av sidene multiplisert med konstanten a.

Forholdstallet mellom sidelengdene i hver av de tre nye trekantene og sidelengdene i den opprinnelige trekanten vil da være lik konstanten det ble multiplisert med. Hver av de tre nye trekantene må da være formlik med den opprinnelige trekanten. Det må igjen bety at de tre trekantene er innbyrdes formlike.

Vi setter sammen de tre trekantene som vist på figuren nedenfor.



b) Begrunn at E, D og C ligger på en rett linje.

Vi ønsker å vise at $\angle EDC = 180°$, altså at E, D og C ligger på en rett linje.

Det betyr at $\angle EDC = \angle ADE + \angle ADB + \angle BDC = 180°$.

Vi har at de tre trekantene er rettvinklede.

Det gir $\angle ADB = 90°$ og $\angle ADE + \angle DAE = 180° - 90° = 90°$.

Trekantene er også innbyrdes formlike. Det gir $\angle BDC = \angle DAE$ (samsvarende vinkler).

Vi har da at $\angle ADE + \angle BDC = 90°$. Fra tidligere har vi at $\angle ADB = 90°$.

Vi har dermed vist at $\angle ADE + \angle BDC + \angle ADB = 180°$, og E, D og C ligger dermed på en rett linje.

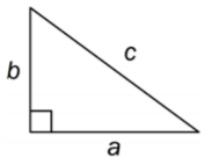
c) Forklar at firkanten $ABCE$ er et rektangel. Hvordan viser dette at Pytagoras' setning gjelder?

Fra oppgave a) vet vi at $\angle E = \angle C = 90°$. I deloppgave b) viste vi at E, D og C ligger på en rett linje. Det betyr at sidekantene EA og CB er parallelle. Fra figuren ser vi også at disse sidekantene har samme lengde ab. Det betyr at sidekanten AB er parallell og like lang som sidekanten EC. Vi har dermed et rektangel.

Vi har at sidekanten AB og EC er like lange. Videre er $EC = ED + DC$.
Vi kan skrive

$$ED + EC = AB$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Denne oppgaven startet med trekanten

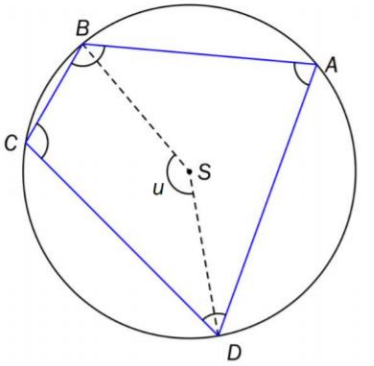


Vi ser at summen av kvadratene til katetene a og b tilsvarer kvadratet til hypotenusen, altså Pytagoras' setning.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Figuren viser en sirkel med sentrum i S og en firkant *ABCD* som er innskrevet i sirkelen.
La $u = \angle BSD$.



a) Forklar at $\angle DCB = 180° - \frac{1}{2}u$

$\angle DCB$ er en periferivinkel som spenner over sirkelbuen *BD*. Setningen om periferivinkel og sentralvinkel sier at periferivinkelen vil være halvparten så stor som den tilhørende sentralvinkel. Sentralvinkelen til buen *BD* som spenner over samme periferivinkelen $\angle DCB$ er $360° - u$.

Det betyr at $\angle DCB = \frac{360° - u}{2} = \frac{360°}{2} - \frac{u}{2} = 180° - \frac{1}{2}u$

b) Vis at $\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC = 180°$

$\angle BAD$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som sentralvinkelen u, så $\angle BAD = \frac{1}{2}u$. Vi har da $\angle BAD + \angle DCB = \frac{1}{2}u + 180° - \frac{1}{2}u = 180°$

Vinkelsummen i firkanten *ABCD* er $360°$

$\angle BAD + \angle DCB + \angle CBA + \angle ADC = 360°$
$\angle CBA + \angle ADC = 360° - (\angle BAD + \angle DCB)$
$\angle CBA + \angle ADC = 360° - 180°$
$\angle CBA + \angle ADC = 180°$

$\angle BAD + \angle DCB = \angle CBA + \angle ADC = 180°$

Alternativt: siden vi har vist at summen av de to første vinklene er $180°$, *må* summen av de to siste vinklene også være $180°$, siden vinkelsummen i en firkant er $360°$.

Oppgave 2 (3 poeng)

Likningen for en sirkel kan skrives på formen

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ , der } a, b \text{ og } c \text{ er konstanter.}$$

Punktene $A(3, 8)$, $B(9, 6)$, $C(13, -2)$ ligger på sirkelperiferien.

a) Sett opp et likningssystem som svarer til opplysningene ovenfor.
Vi setter koordinatene til punktene A, B og C inn i likningen ovenfor og får tre likninger. Vi velger å bruke CAS i GeoGebra, se nedenfor.

1	$f(x, y) := x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c$ $\rightarrow \mathbf{f(x, y) := a\,x + b\,y + x^2 + y^2 + c}$
2	$f(3, 8) = 0$ $\rightarrow \mathbf{3\,a + 8\,b + c + 73 = 0}$
3	$f(9, 6)$ $\rightarrow \mathbf{9\,a + 6\,b + c + 117}$
4	$f(13, -2)$ $\rightarrow \mathbf{13\,a - 2\,b + c + 173}$

I linje 1 definerer vi funksjonen $f(x, y)$. I linje 2, 3 og 4 ser vi de tre likningene i likningssystemet vi skulle finne.

b) Bruk CAS til å bestemme a, b og c.
Bruker CAS i GeoGebra og løser likningssettet.

1	$f(x, y) := x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c$ $\rightarrow \mathbf{f(x, y) := a\,x + b\,y + x^2 + y^2 + c}$
2	$f(3, 8) = 0$ $\rightarrow \mathbf{3\,a + 8\,b + c + 73 = 0}$
3	$f(9, 6)$ $\rightarrow \mathbf{9\,a + 6\,b + c + 117}$
4	$f(13, -2)$ $\rightarrow \mathbf{13\,a - 2\,b + c + 173}$
5	$\{\$2, \$3, \$4\}$ Løs: $\mathbf{\{\{a = -6, b = 4, c = -87\}\}}$

Vi finner at $a = -6$, $b = 4$ og $c = -87$

Oppgave 3 (5 poeng)

Et flyselskap har en flyrute mellom Oslo og Bergen. Flyene som brukes, har plass til 116 passasjerer. Sannsynligheten for at en passasjer som har kjøpt billett ikke møter til flyavgang, er 6 %.

Vi lar X være antall passasjerer som møter til en tilfeldig valgt flyavgang.

a) Hva må vi forutsette for å kunne bruke en binomisk sannsynlighetsmodell i denne situasjonen?

- Hvert av delforsøkene må ha to mulige utfall. I dette tilfellet betyr det at en passasjer som har kjøpt billett enten møter til flyavgangen eller ikke møter opp.

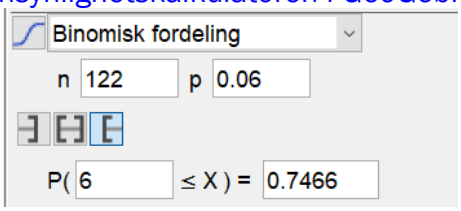
- Delforsøkene må være uavhengige av hverandre. Det betyr at sannsynligheten for at en person møter eller ikke møter til en flyavgang ikke påvirker sannsynligheten for at en annen person møter eller ikke møter til flyavgangen.

- Hvert av delforsøkene må ha lik sannsynlighet. Det betyr at sannsynligheten på 6 % for at en passasjer ikke møter til en flyavgang, og sannsynligheten for at passasjeren møter er 94 %, er lik hele tiden.

I resten av denne oppgaven går vi ut fra at X er binomisk fordelt.

b) Til en flyavgang er det solgt 122 billetter. Bestem sannsynligheten for at alle som møter, får plass på flyet.

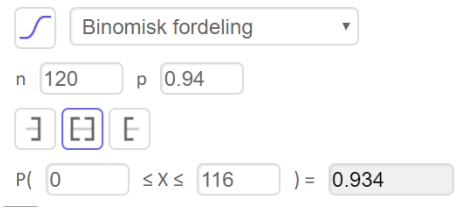
At alle passasjerene som møter får plass på flyet betyr at seks av dem som har kjøpt billett ikke møter. Vi finner sannsynligheten for at seks passasjerer ikke møter ved å bruke sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.

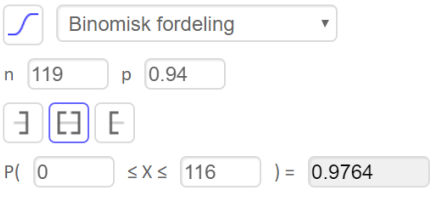


Vi finner at sannsynligheten er 74,7 % for at seks passasjerer ikke møter og at 116 passasjerer får plass på flyet.

Flyselskapet ønsker at sannsynligheten skal være minst 95 % for alle som møter, skal få plass på flyet.

c) Hvor mange billetter kan flyselskapet maksimalt selge da?

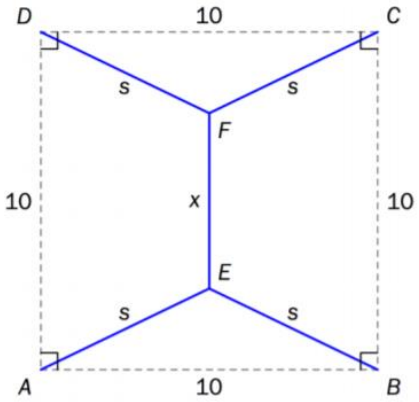




Vi prøver oss fram i sannsynlighetskalkulatoren, og finner at flyselskapet maksimalt kan selge 119 billetter dersom de skal være sikre på at minst 95 % får plass.

Oppgave 4 (4 poeng)

Fire byer *A, B, C* og *D* ligger plassert slik at de danner et kvadrat med side 10. Vi skal lage veiforbindelse mellom disse fire byene. Det viser seg at den samlede veilengden blir minst når veiene legges slik skissen nedenfor viser. De enkelte veistrekningene er markert med blått. Alle mål er gitt i kilometer.



Vi lar avstanden mellom *E* og *F* være x.

a) Vis at den samlede veilengden er gitt ved

$$g(x) = x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}$$

Vi lar M være midtpunktet mellom *AB*. Avstanden *AM* blir da 5. Avstanden *ME* blir dermed $\frac{10-x}{2}$. Vi kan da bruke Pytagoras' læresetning og finne et uttrykk for lengden s, se linje 1 og 2 nedenfor. Den samlede veilengden er gitt ved $4 \cdot x + s$. I linje 3 finner vi et uttrykk for *g*. I linje 4 sjekker vi om dette uttrykket for *g* er det samme som uttrykket i oppgaven, og det er det.

1 $s^2 = 5^2 + \left(\frac{10-x}{2}\right)^2$

→ $s^2 = \frac{1}{4}x^2 - 5x + 50$

2 Løs($1, s, s > 0)

→ $\left\{s = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 20x + 200}\right\}$

3 $g(x) := x + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 20x + 200}$

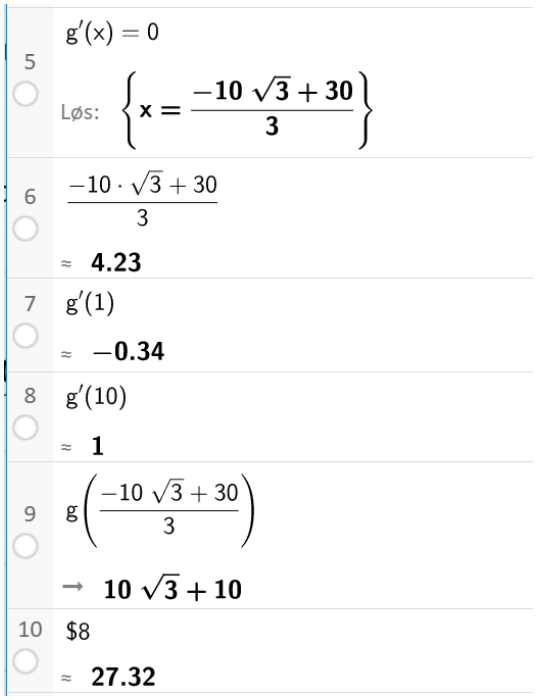
→ $g(x) := x + 2\sqrt{x^2 - 20x + 200}$

4 $g(x) \stackrel{?}{=} x + 2\sqrt{(x-10)^2 + 10^2}$

→ true

b) Bruk CAS til å bestemme x slik at den samlede veilengden blir minst mulig. Hva blir den samlede veilengden da?

Vi setter $g'(x)=0$ og finner at veilengden er minst når $x=\dfrac{-10\sqrt{3}+30}{3}\approx 4{,}23$. Linje 6 og 7 bekrefter at dette er en minimalverdi og ikke en maksimalverdi. Rad 10 viser at den minste veilengden er 27,32 kilometer.



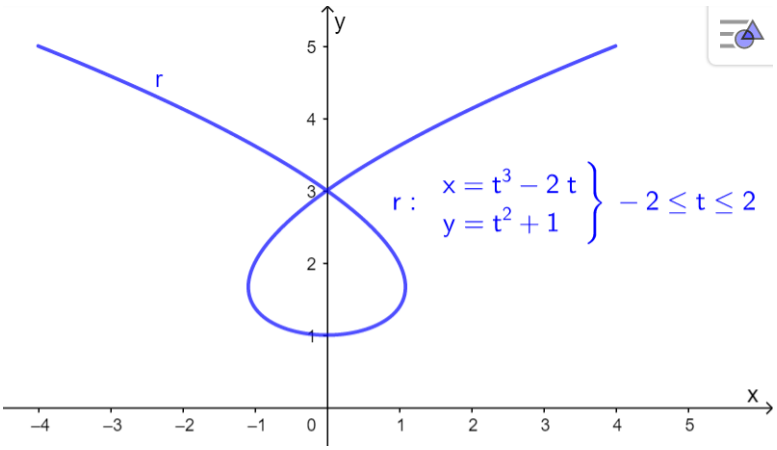
Oppgave 5 (8 poeng)

Posisjonsvektoren til en partikkel ved et tidspunkt t er gitt ved

$$\vec{r}(t)=\left[t^3-2t,\ t^2+1\right] \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til $\vec{r}$ for $t\in[-2,\ 2]$

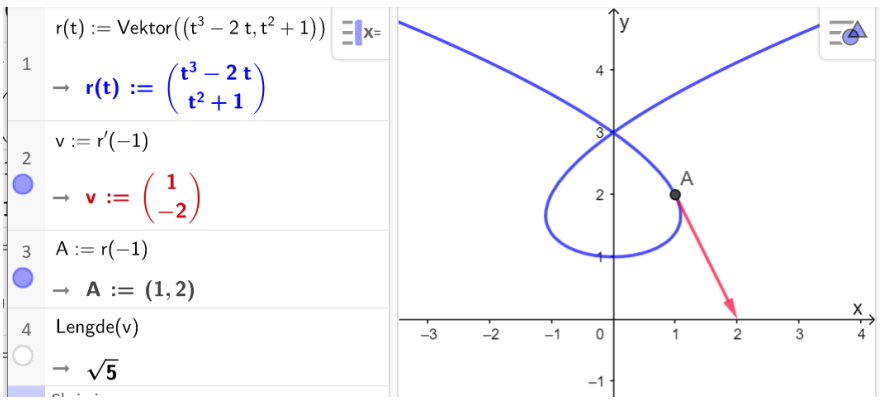
Bruker kommandoen
«Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)» og tegner kurven.



b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(-1)$ og banefarten $|\vec{v}(-1)|$. Tegn fartsvektoren inn på grafen i det aktuelle punktet.

I linje 2 har vi funnet fartsvektoren $\vec{v}(-1)=[1,\ -2]$. I linje 3 ser vi at startpunktet til vektoren er i punktet $(1,\ 2)$, punkt A på grafen nedenfor. For å tegne inn fartsvektoren på punktet A markerer vi vektoren $[1,\ -2]$ og høyreklikker. Vi kan da bestemme hvor vektoren skal starte.

I linje 4 har vi funnet lengden til fartsvektoren som viser banefarten som i dette tilfellet er $\sqrt{5}$.



c) Bruk CAS til å bestemme t slik at banefarten til partikkelen blir 2.

Vi setter $|r'(t)| = 0$ og finner tre mulige løsninger, linje 2 nedenfor.

1 $r(t) := \text{Vektor}((t^3 - 2t, t^2 + 1))$

$\rightarrow \quad \mathbf{r(t) := \begin{pmatrix} t^3 - 2t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}}$

2 $|r'(t)| = 2$

Løs: $\left\{\mathbf{t = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}, t = 0, t = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}}\right\}$

3 $\left\{t = -2\frac{\sqrt{2}}{3}, t = 0, t = 2\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

$\approx \quad \mathbf{\{t = -0.94, t = 0, t = 0.94\}}$

Alle løsningene ligger innenfor definisjonsområdet. Det gir at partikkelen har banefarten 2 ved disse tre tidspunktene.

d) Vis at banefarten til partikkelen har ekstremalverdi i de punktene på kurven der fartsvektoren står normalt på akselerasjonsvektoren.

1 $\rightarrow \quad \mathbf{r(t) := \begin{pmatrix} t^3 - 2t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}}$

2 $a(t) := |r'(t)|$

$\approx \quad \mathbf{a(t) := \sqrt{9t^4 - 8t^2 + 4}}$

3 $a'(t) = 0$

Løs: $\left\{\mathbf{t = -\frac{2}{3}, t = 0, t = \frac{2}{3}}\right\}$

4 $a'(-1)$

$\approx \quad \mathbf{-4.47}$

5 $a'\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\approx \quad \mathbf{1.09}$

6 $a'\left(\frac{1}{2}\right)$

$\approx \quad \mathbf{-1.09}$

7 $a'(1)$

$\approx \quad \mathbf{4.47}$

8 $\text{Skalarprodukt}(r'(t), r''(t)) = 0$

Løs: $\left\{\mathbf{t = -\frac{2}{3}, t = 0, t = \frac{2}{3}}\right\}$

I linje 3 finner vi eventuelle ekstremalpunkt. Linje 4-7 viser at banefarten er minst for $t = \pm\frac{2}{3}$ og størst for $t = 0$

I linje 8 ser vi at fartsvektoren ($r'(t)$) står normalt på akselerasjonsvektoren ($r''(t)$) for de samme verdiene av t der banefarten til partikkelen har ekstremalverdier, linje 3.

Kilder for bilder, tegninger osv.

- Andre bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet